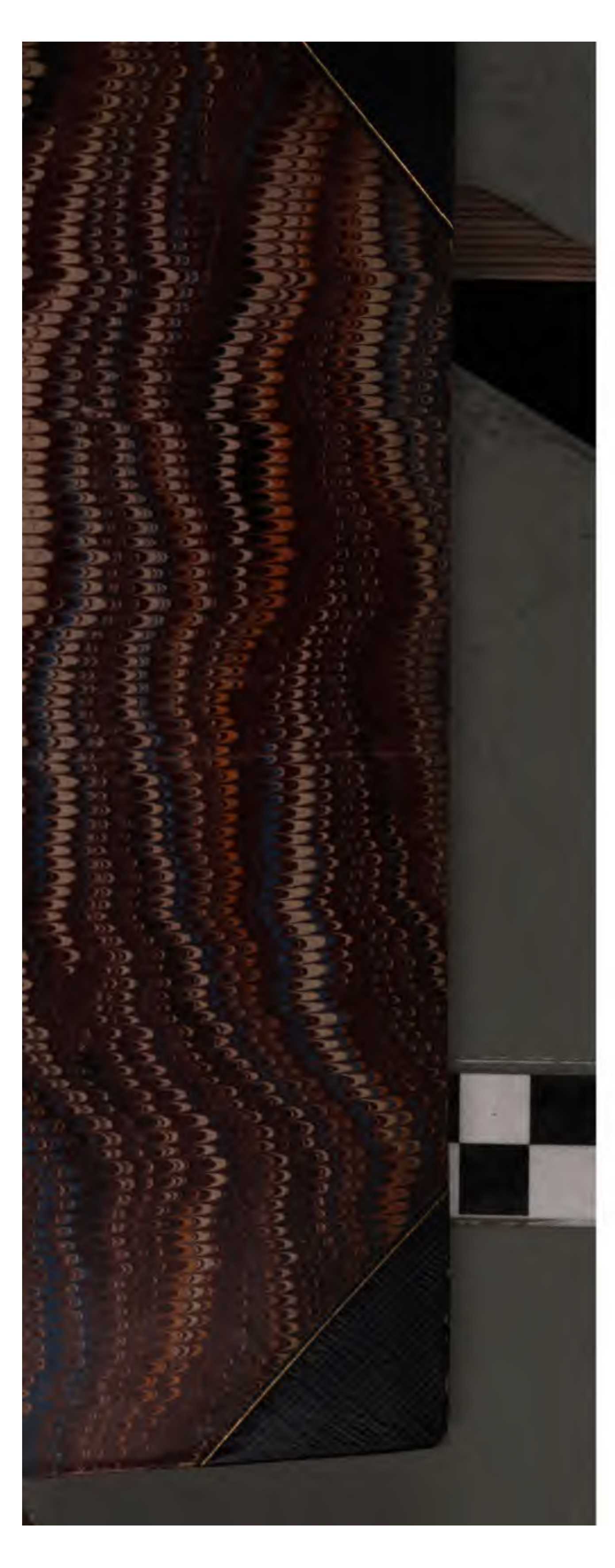












DIE

MAGISCHEN FIGUREN.

ALLGEMEINE

LÖSUNG UND ERWEITERUNG

EINES

AUS DEM ALTERTHUME STAMMENDEN PROBLEMS.

VON

DR. HERMANN SCHEFFLER,

MITGLIED DER KAISERLICH RUSSISCHEN SOZIETÄT DER NATURFORSCHER ZU MOSKAU, KORRESP. MITGLIED DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU PADUA, EHRENMITGLIED DES KÖNIGL. GROSSHERZOGL. INSTITUTS DER NATURWISSENSCHAFTEN UND MATHEMATIK VON LUXEMBURG.

MIT ZWEI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.



LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
1882.

Abel, Niels Henrik, oeuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. SYLOW et S. LIE. 2 tomes. 4. geh. n. ℳ 24.—

Tome premier [VIII u. 621 S.] contenant les mémoires publiés par ABEL. Tome second [IV u. 341 S.] contenant les mémoires posthumes d'ABEL.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Viertes Heft. [278 S. mit einer lithogr. Tafel.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.40.

Inhalt: I. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. (Mit einer lithogr. Tafel.) — II. Der Traktat Franco's von Luettich: „de quadratura circuli." Herausgegeben von Dr. WINTERBERG. — III. Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Ragusaer. Aus dem Jahre 1630. Von EUGEN GELCICH, Direktor der nautischen Schule in Lussinpiccolo. — IV. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. Von Dr. P. KRAMER in Halle a. d. S.

Dronke, Dr. Adolf, Direktor der Realschule I. O. zu Trier, Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung. Unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. BEER und Dr. J. PLÜCKER. [IV u. 97 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.—.

Durège, Dr. H., ord. Professor an der Universität in Prag, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Dritte verbesserte Auflage [X u. 268 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—.

Fiedler, Dr. Wilhelm, Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. Mit 16 lithogr. Tafeln. [XVI u. 264 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 9.—.

Fuhrmann, Dr. Arwed, ordentl. Professor am Königlichen Polytechnikum zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Ein Übungsbuch für Studierende der Mathematik, Physik, Technik etc. In zwei Teilen. Zweiter Teil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. gr. 8. [VI u. 222 S.] geh. n. ℳ 3.60.

Der I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper [VI u. 138 S.] n. ℳ 2.40, erschien 1879 in zweiter Auflage.

Günther, Dr. Siegmund, Professor am K. Gymnasium zu Ansbach in Bayern, parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung. [IV u. 99 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.80.

2 3

DIE

MAGISCHEN FIGUREN.

ALLGEMEINE

LÖSUNG UND ERWEITERUNG

EINES

AUS DEM ALTERTHUME STAMMENDEN PROBLEMS.

VON

Dr. HERMANN SCHEFFLER,

MITGLIED DER KAISERLICH RUSSISCHEN SOZIETÄT DER NATURFORSCHER ZU MOSKAU, KORRESP. MITGLIED DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU PADUA, EHRENMITGLIED DES KÖNIGL. GROSSHERZOGL. INSTITUTS DER NATURWISSENSCHAFTEN UND MATHEMATIK VON LUXEMBURG.

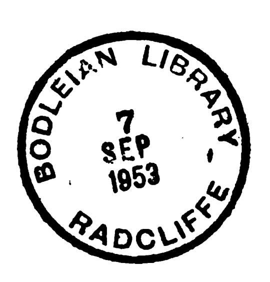
MIT ZWEI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.



LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.



Drnck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.



I. Das magische Quadrat.

1. Das magische oder Zauberquadrat, worunter man eine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3 ... n^2 in Quadratform dergestalt versteht, dass jede horizontale, vertikale und diagonale Reihe dieselbe Summe $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ bildet, hat nach dem historischen Berichte in Klügel's mathematischem Wörterbuche schon den Indern und später den Arabern, den Griechen und den Abendländern als Talisman gedient. In allen Jahrhunderten haben sich namhafte Mathematiker damit beschäftigt und bald in selbstständigen Abhandlungen, bald in den Schriften der gelehrten Gesellschaften ihre Arbeiten niedergelegt. Es finden sich darunter die Namen Emanuel Moschopulos (Königliche Bibliothek zu Paris, 1400), Agrippa von Nettesheim im sechzehnten Jahrhundert (de occulta philosophia), Bachet de Meziriac (problèmes plaisants, 1613), Arnaud (nouveaux éléments de géometrie, 1667), Frenicle (Abhandlungen der Pariser Akademie, 1693), Poignard (1703), de la Hire (mémoires de l'académie française, 1705), Sauveur (ebendaselbst, 1710), Ons-en-Bray (ebendaselbst, 1750), Rallier des Ourmes (ebendaselbst), Stifel (arithmetica integra), Adam Riese (Rechenbuch, 1550), Clausberg (demonstrative Rechenkunst), Cornelius Capito (1767), Vieth, Lorenz, Mollweide (Dissertatio de quadratis magicis, Lipsiae 1816).

Schon die Ehrwürdigkeit des Alterthums kann das Interesse an einer Aufgabe erregen; dasselbe erhöht sich, wenn diese Aufgabe trotz der vielfachen Bemühungen aller Zeiten nur singuläre Auflösungen erfahren hat, im wissenschaftlichen Sinne aber ungelös't geblieben ist, und wenn es sich zeigt, dass diese Aufgabe, welche sich bisher in den engen Grenzen einer speziellen Figur bewegt hat, einer Verallgemeinerung für alle Figuren fähig ist.

Was den unmittelbaren Nutzen der magischen Figuren betrifft, so mag sich ein solcher nicht gerade in den gewöhnlichsten Bedürfnissen des praktischen Lebens darbieten: allein, dieses Schicksal theilen dieselben mit vielen Sätzen der Zahlentheorie. Da es sich um ein mathematisches Gesetz handelt: so wird sich dafür auch eine Verwendung finden: den Mathematiker interessirt zunächst nicht der praktische Nutzen, sondern das reine Grössengesetz, woron die magische Figur in der That ein beachtenswerthes Stück aus dem geheimnissvollen Gebiete der ganzen Zahlen zur Erkenntniss bringt. Dieser Gesichtspunkt mag die nachstehende Abhandlung rechtfertigen: um jedoch nicht durch zu grosse Breite zu ermüden, beschränken wir dieselbe auf die Mittheilung der Resultate, ohne spezielle Ausführung der Beweise, welche der kundige Leser ohne grosse Mühe ergänzen wird.

Quadrat mit ungerader Stellenzahl.

2. Wenn n eine ungerade Zahl ist: so wähle man vier positive oder negative ganze Zahlen a, b, a', b' von der Beschaffenheit, dass eine jede von ihnen, sowie jede der Zahlen $ab' - a'b$, $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ relativ prim zu n oder vom absoluten Werthe 1 (jedoch nicht gleich 0) ist. Man denke sich mit Hülfe dieser Zahlen durch fortgesetzte Addition des Werthes $a + bn$ in horizontaler Richtung und durch fortgesetzte Addition des Werthes $a' + b'n$ in vertikaler Richtung aus der Zahl 1 die nachstehenden Progressionen von je n Gliedern gebildet:

$$\begin{array}{lll}
1 + 0 + 0 . n & 1 + a + bn & 1 + 2a + 2bn \\
1 + a' + b'n & 1 + (a + a') + (b + b')n & 1 + (2a + a') + (2b + b')n \\
1 + 2a' + 2b'n & 1 + (a + 2a') + (b + 2b')n & 1 + (2a + 2a') + (2b + 2b')n \\
1 + 3a' + 3b'n & 1 + (a + 3a') + (b + 3b')n & 1 + (2a + 3a') + (2b + 3b')n \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
1 + 3a + 3bn \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \text{etc.} \\
1 + (3a + a') + (3b + b')n \quad . \; . \; . & \text{etc.} \\
1 + (3a + 2a') + (3b + 2b')n \quad . \; . & \text{etc.} \\
1 + (3a + 3a') + (3b + 3b')n \quad . \; . & \text{etc.} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

Jede dieser Zahlen ist ein Trinom von der Form $1+c+dn$. Nimmt man nun statt der Koeffizienten c und d ihre kleinsten positiven Reste nach n (wobei der Rest 0 zugelassen, der Rest n aber ausgeschlossen ist); so stellen diese Zahlen ein magisches Quadrat dar. Wird also der Rest von xa mit r_x, der von xb mit s_x, der von xa' mit r'_x und der von xb' mit s'_x bezeichnet; so kann ein magisches Quadrat sehr leicht sofort aus folgender oberen und vorderen Reihe

$1+r_0+s_0n \quad 1+r_1+s_1n \quad 1+r_2+s_2n \quad 1+r_3+s_3n$ etc.
$1+r'_1+s'_1n$
$1+r'_2+s'_2n$
$1+r'_3+s'_3n$
etc.

hergestellt werden, indem man sukzessiv die Reste r mit den Resten r', sowie die Reste s mit den Resten s' durch Addition vereinigt, aber statt der erhaltenen Summen, wenn sie $\geqq n$ sind, immer wieder ihre Reste setzt.

Nimmt man beispielsweise für $n=5$ die Werthe $a=1$, $b=2$, $a'=-3$, $b'=1$, wodurch $ab'-a'b=7$, $a+a'=-2$, $b+b'=3$, $a-a'=4$, $b-b'=1$ wird, also alle Bedingungen erfüllt sind; so erhält man (da der Rest von -3 gleich 2 ist)

1+0+0.5	1+1+2.5	1+2+4.5	1+3+1.5	1+4+3.5
1+2+1.5	1+3+3.5	1+4+0.5	1+0+2.5	1+1+4.5
1+4+2.5	1+0+4.5	1+1+1.5	1+2+3.5	1+3+0.5
1+1+3.5	1+2+0.5	1+3+2.5	1+4+4.5	1+0+1.5
1+3+4.5	1+4+1.5	1+0+3.5	1+1+0.5	1+2+2.5

oder, wenn man von den Trinomen $1+r+sn$ nur die drei Koeffizienten $1\,r\,s$ schreibt,

100	112	124	131	143
121	133	140	102	114
142	104	111	123	130
113	120	132	144	101
134	141	103	110	122

Diess ist das magische Quadrat

1	12	23	9	20
8	19	5	11	22
15	21	7	18	4
17	3	14	25	6
24	10	16	2	13

welches in jeder horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihe die Summe 65 bildet.

3. Die nach der vorstehenden Regel gebildeten Grundquadrate beginnen mit der Zahl 1. Offenbar kann man jede beliebige Zahl p, wenn man dieselbe (durch Division mit n in $p-1$) in die Form $p = 1 + r + s \, . \, n$ bringt, an jede beliebige Stelle setzen und von hier aus nach rechts und links, sowie nach unten und oben das Quadrat ergänzen. Eine besondere Klasse von Grundquadraten ergiebt sich, wenn man die mittelste der Zahlen 1, 2, 3 ... n^2, nämlich die Zahl $\frac{1}{2}(n^2+1)$ in den Mittelpunkt des Quadrates stellt. Für diese Zahl, welche die Form

$$1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot n$$

hat, kann man aus dem Mittelpunkte nach der obigen Regel leicht ein magisches Quadrat ergänzen: allein jetzt braucht die Bedingung, dass die vier Zahlen $a+a'$, $b+b'$, $a-a'$, $b-b'$ relativ prim zu n seien, nicht mehr erfüllt zu werden. Ein solches für $n=5$, $a=1$, $b=2$, $a'=1$, $b'=1$ konstruirtes Quadrat ist, wenn man zunächst von den Trinomen $1+r+sn$ nur die drei Koeffizienten $1\,r\,s$ schreibt,

131	143	100	112	124	9	20	1	12	23
142	104	111	123	130	15	21	7	18	4
103	110	122	134	141	16	2	13	24	10
114	121	133	140	102	22	8	19	5	11
120	132	144	101	113	3	14	25	6	17

4. Die Grundquadrate in Nr. 2 und 3 sind nach demselben Prinzipe der Anordnung in horizontalen und vertikalen Reihen gebildet. Ausser diesen Reihen kommen auch dia-

gonale Reihen in Betracht. Hierunter verstehen wir nicht bloss die in einer Diagonalen des Quadrates stehende Zahlenreihe, sondern auch jede andere Reihe von n Zahlen, welche aus zwei mit der Diagonalen parallel laufenden Strecken besteht, die so liegen, dass sie in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe eine Stelle treffen, wie z. B. die in Fig. 1 dargestellten beiden Strecken ef und gih.

Das vollkommene magische Quadrat hat die bis jetzt nicht gehörig gewürdigte Eigenschaft, dass nicht nur jede horizontale und vertikale Reihe und jede Hauptdiagonale ad und cb, sondern auch jede diagonale Reihe (wie ef, gih) die nämliche Summe bildet. Ein solches vollkommenes Quadrat erfordert die Erfüllung aller in Nr. 2 gestellten Bedingungen. Jede dieser Bedingungen sichert dem Quadrate eine besondere Eigenschaft: wenn $ab' - a'b$ relativ prim zu n ist, sind alle Zahlen des Quadrates verschieden, sie umfassen also sämmtliche Zahlen von 1 bis n^2; wenn a und b relativ prim zu n sind, hat jede horizontale Reihe dieselbe Summe; wenn a' und b' relativ prim zu n sind, hat jede vertikale Reihe diese Summe; wenn $a + a'$ und $b + b'$ relativ prim zu n sind, hat jede zu AD parallele diagonale Reihe diese Summe; wenn $a - a'$ und $b - b'$ relativ prim zu n sind, hat jede zu CB parallele diagonale Reihe diese Summe. Durch Aufopferung der einen oder anderen dieser Bedingungen ergeben sich unvollkommene magische Quadrate. Setzt man nach Nr. 4 die Zahl $\frac{1}{2}(n^2+1)$ in das Mittelfeld; so enthalten die beiden Hauptdiagonalen stets die gewünschte Summe: wenn man für diesen Fall die Bedingungen, dass $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ relativ prim zu n seien, ausser Acht lässt, erhält man durch die übrigen Bedingungen unvollkommene Quadrate, in welchen jede horizontale, jede vertikale Reihe und jede der beiden Hauptdiagonalen dieselbe Summe bilden.

Um alle den Bedingungen in Nr. 2 entsprechenden charakteristischen Grundquadrate zu erhalten, braucht man für a, b, a', b' nur alle möglichen Werthe zuzulassen, welche kleiner als n sind.

5. Für $n = 3m$ können die Bedingungen für ein vollkommenes magisches Quadrat nicht erfüllt werden, weil von den vier Zahlen a, a', $a + a'$, $a - a'$ mindestens eine durch 3 theilbar, also nicht relativ prim zu n ist. Es giebt daher kein vollkommenes magisches Quadrat für die Seitenzahl 3; alle Quadrate aus neun Zahlen, wie z. B.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

sind unvollkommen, indem darin wohl die horizontalen und vertikalen Linien und die Hauptdiagonalen, nicht aber sämmtliche diagonalen Reihen die Summe 15 ergeben.

6. In dem nach Nr. 2 konstruirten magischen Quadrate bilden die laufenden Zahlen 1, 2, 3, ... n^2 parallel laufende schräge Linien. Theilt man die Zahlen 1, 2, ... n^2 in n Reihen, wovon die erste, zweite, dritte etc. mit 1, $n+1$, $2n+1$ etc. anfängt, also in die Reihen

1	2	3	$\ldots n$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\ldots 2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\ldots 3n$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

so erfüllt jede dieser n Reihen eine der gedachten parallelen Linien und die Anfangsglieder 1, $n + 1$, $2n + 1$, ..., ferner die zweiten Glieder 2, $n + 2$, $2n + 2$, ..., die dritten Glieder etc. bilden für sich ebenfalls n parallele schräge Linien. Wenn man die Richtung dieser parallelen Linien ermittelt, kann man das magische Quadrat statt durch die Reste r und s durch Einzählung der laufenden Zahlen 1, 2, 3, ... in die schrägen Linien herstellen.

Die Richtung, in welcher die Zahlen 1, 2, 3, ... eingezählt werden, nennen wir die Zählrichtung, die Richtung, in welcher die Anfangspunkte 1, $n + 1$, $2n + 1$, ... der einzelnen Zählreihen aufeinander folgen, die Versetzrichtung. Um beide herzustellen, verzeichnen wir nach Fig. 1 ein Linienquadrat $ABDC$ von n^2 Feldern, deren Mittelpunkte die Stellen der n^2 Zahlen des Zahlenquadra-

tes *abdc* sind. Zieht man durch zwei Zahlörter e und f die gerade Linie ef, verlängert dieselbe beiderseits bis zum Umfange E und F des Quadrates, geht, indem man von e über f fortschreitet, sobald man eine Quadratseite bei F erreicht, in die gegenüberliegende Seite nach G mittelst der normalen Linie FG über, schreitet darauf von G in der zu ef parallelen Richtung GH wieder bis zum Umfange des Quadrates vor, geht alsdann mittelst der Normalen HE in die gegenüberliegende Seite über; so gelangt man endlich in den Anfangspunkt e dieses Zuges zurück; $EFGHE$ bildet also einen in sich zusammenlaufenden Zug mit den parallelen schrägen Strecken EF, GH, während die Zwischenstrecken FG, HE mit den Quadratseiten parallel laufen. Die parallelen schrägen Strecken EF, GH eines solchen Zuges bilden eine schräge Zählreihe oder auch eine Versetzreihe und nehmen n Zahlen in sich auf.

In Fig. 2 ist eine aus drei Strecken EF, GH, JK bestehende schräge Reihe dargestellt; ob einzelne Strecken, wie hier JK, keine Zahl treffen, ist gleichgültig.

Wenn eine Versetzreihe nur einen Punkt mit einer Zählreihe gemein hat, zerfällt das Zahlenquadrat in n gleich gerichtete schräge Zählreihen von je n Zahlen, von welchen eine jede in einem anderen Punkte der Versetzreihe beginnt.

Damit nun eine Zählreihe nur einen Punkt mit der Versetzreihe gemein habe, also sämmtliche n^2 Zahlen nach dieser Zählordnung untergebracht werden können, und damit ferner ein vollkommenes magisches Quadrat entstehe, welches in jeder horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihe dieselbe Summe darbietet, muss die Zähl- und Versetzrichtung gewissen Bedingungen genügen. Ist in Fig. 2 für zwei benachbarte Punkte a und e der Zählrichtung $ak = \alpha$ die horizontale Abszisse und $ke = \beta$ die vertikale Ordinate, ferner für zwei benachbarte Punkte a und e' der Versetzrichtung $ak' = \alpha'$ die horizontale Abszisse und $k'e' = \beta'$ die vertikale Ordinate; so müssen die Zahlen α, β, α', β' so gewählt werden, dass jede von ihnen und auch die Zahlen $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, $\alpha + \beta$, $\alpha' + \beta'$, $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ relativ prim zu n sind. Die Bedingung

für $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ sichert die Verschiedenheit aller Zahlörter, für β und β' die Konstanz der Summe in horizontaler Richtung, für α und α' die Konstanz in vertikaler Richtung, für $\alpha + \beta$ und $\alpha' + \beta'$ die Konstanz in der zu CB parallelen diagonalen Richtung, für $\alpha - \beta$ und $\alpha' - \beta'$ die Konstanz in der zu AD parallelen diagonalen Richtung.

Übrigens kann man jedes Feld des Quadrates zum ersten annehmen, um darin mit der Zahl 1 zu beginnen. Wenn man die Zahl $\frac{1+n^2}{2}$ in das Mittelfeld setzt, erhalten die beiden Hauptdiagonalen stets die verlangte Summe.

7. Durch Spezialisirung kann man aus dem vorstehenden allgemeinen Gesetze verschiedene besondere Regeln ableiten, von welchen eine jede eine besondere Klasse von magischen Quadraten liefert. Nimmt man z. B. $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\alpha' = -1$, $\beta' = -2$, also $\alpha\beta' - \alpha'\beta = -1$, $\alpha + \beta = 2$, $\alpha' + \beta' = -3$, $\alpha - \beta = 0$, $\alpha' - \beta' = 1$; so erhält man ein magisches Quadrat, in welchem alle horizontalen und vertikalen Reihen, jedoch nicht alle diagonalen Reihen (sondern nur die beiden Hauptdiagonalen) dieselbe Summe bilden, wie es für $n = 5$ das Quadrat

11	18	25	2	9
10	12	19	**21**	3
4	**6**	13	20	22
23	5	7	14	**16**
17	24	**1**	8	15

zeigt, worin wir die Anfangsglieder der schrägen Reihen hervorgehoben haben. In diesem Verfahren erkennt man die in Klügel's Wörterbuche, Seite 19, angeführte erste Regel von Moschopulos, welche dem Verfahren der Inder ähnlich sein soll. Man sieht, diese Regel ist keine allgemeine, sondern nur eine Spezialität, ausserdem ergiebt sie kein vollkommenes Quadrat.

Eine andere Spezialität entspricht den Werthen $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 2$, wofür $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 3$, $\alpha + \beta = 3$, $\alpha' + \beta' = 3$, $\alpha - \beta = 1$, $\alpha' - \beta' = -1$ wird. Diese Regel ist

nur für solche Werthe von n brauchbar, welche den Faktor 3 nicht enthalten, und liefert für solche Werthe ein vollkommenes Quadrat, z. B. für $n = 5$ das Quadrat

1	20	9	23	12
24	13	2	**16**	10
17	**6**	25	14	3
15	4	18	7	**21**
8	22	**11**	5	19

Diess ist die in Klügel's Wörterbuche, Seite 20, angegebene zweite Regel von Moschopulos. Man sieht, auch diese Regel ist keine allgemeine, da sie nicht für alle Werthe von n gilt.

Eine dritte Spezialität, welche jedoch für solche Werthe von n, die den Faktor 3 enthalten, nicht zu gebrauchen ist, ergiebt sich durch $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 3$, indem hierfür $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2$, $\alpha + \beta = 2$, $\alpha' + \beta' = 4$, $\alpha - \beta = 0$, $\alpha' - \beta' = -2$ wird. Diese Regel liefert unvollkommene Quadrate, wie

1	15	24	8	17
18	2	**11**	25	9
10	19	3	12	**21**
22	**6**	20	4	13
14	23	7	**16**	5

Eine vierte Spezialität liefern die Werthe $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 2$, wofür $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, $\alpha + \beta = 5$, $\alpha' + \beta' = 3$, $\alpha - \beta = -1$, $\alpha' - \beta' = -1$ ist. Diese Regel giebt für Werthe von n, welche weder den Faktor 3, noch den Faktor 5 enthalten, vollkommene Quadrate, für Werthe von n jedoch, welche den Faktor 3 oder 5 enthalten, unvollkommene Quadrate.

8. Diejenigen vollkommenen Quadrate, in deren Mittelpunkte nach Nr. 3 die Zahl $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$ steht, zeichnen sich ausser durch die in Nr. 2, 3 und 4 genannten noch durch die folgenden leicht zu konstatirenden Eigenschaften aus.

Jede vier in den Diagonalen AD und BC (Fig. 3) liegenden Punkte A', B', C', D', welche vom Mittelpunkte J

gleich weit abstehen (also auch die vier Eckpunkte A, B, C, D), und auch je vier in der horizontalen und vertikalen Mittellinie EF und GH liegende Punkte E', F', G', H', welche vom Mittelpunkte J gleich weit abstehen (also auch die vier Punkte E, F, G, H), mithin die vier Eckpunkte irgend eines gerade oder übereck stehenden Quadrates mit dem Mittelpunkte J bilden die konstante Summe $2(n^2+1)$, und zwar zerfallen diese vier Punkte in zwei Paare je mit der Summe n^2+1, z. B. für $n=5$ mit der Summe 26. Ferner bilden jede acht Punkte, welche eine sowohl für die beiden Mittellinien EF, GH, als auch für die beiden Diagonalen AD, BC symmetrische Figur, nämlich ein an allen vier Ecken gleich abgestumpftes Quadrat $a_2\, a_1\, b_1\, b_2\, d_2\, d_1\, c_1\, c_2$ darstellen, die Summe $2(n^2+1)$, z. B. für $n=5$ die Summe 52.

Hieraus ergeben sich unmittelbar die nachstehenden Eigenschaften, welche die symmetrischen Punkt-, Linien- und Flächenfiguren und dadurch das Wesen des vollkommenen magischen Quadrates in höchst beachtenswerther Weise charakterisiren.

Jede Punktfigur von bestimmter Stellenzahl, welche sowohl für die horizontale und vertikale Mittellinie, als auch für die beiden Diagonalen symmetrisch ist, welche also nothwendig aus vier kongruenten Figuren von je r Punkten, mithin überhaupt aus $4r$ Punkten besteht und eine Ineinanderlegung beliebig vieler und beliebig grosser gerader, schiefer und abgestumpfter Quadrate bildet, enthält die Summe $2r(n^2+1)$; demnach enthält z. B. für $n=5$ jede solche symmetrische Punktfigur von $12=4.3$ Stellen die Summe $2.3.26=156$.

Zu einer symmetrischen Figur von $4r$ Punkten kann sich auch noch der Mittelpunkt J gesellen; eine solche Figur von $4r+1$ Punkten enthält die Summe $\frac{1}{2}(4r+1)(n^2+1)$.

Jede symmetrische geschlossene Linienfigur oder Einfassung, welche aus Linienstücken von horizontaler, vertikaler und diagonaler Richtung besteht, bildet, wenn sie $4r$ Stellen enthält, die Summe $2r(n^2+1)$. Einige solche Figuren sind in Fig. 4 und 5 dargestellt.

Wenn man um eine solche Figur eine zweite, dritte u. s. w. legt, deren Seiten mit der ersten parallel sind und um eine Stelle weiter davon abstehen; so wird die Stellenzahl dieser geschlossenen Figuren sich gesetzlich ändern. Solange die folgende Figur ebensoviel Seiten behält als die vorhergehende (wie es bei der Fig. 4 der Fall ist), wächst die Stellenzahl um eine konstante Zahl $4a$. Wenn jedoch die Seitenzahl der folgenden Figur sich ändert (wie es bei der Fig. 5 endlich eintreten wird), macht die Stellenzahl einen Sprung, um in den folgenden Figuren wieder regelmässig zuzunehmen. Immer wird, solange der Radius $JK = r$ zwischen gewissen Grenzen liegt, die Stellenzahl der fraglichen Linienfigur durch die Formel $4(ar + b)$, die Summe der in dieser Einfassung liegenden Zahlen also durch $2(ar + b)(n^2 + 1)$ dargestellt sein.

Ein Quadrat ist eine solche symmetrische Einfassung. Beschreibt man um den Mittelpunkt J des magischen Quadrates, wo die Zahl $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$ steht, lauter konzentrische Quadrate; so wächst die Stellenzahl in jedem folgenden um $8 = 4 . 2$ und die Summe der in diesen Quadraten stehenden Zahlen ist

für den Mittelpunkt selbst gleich $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$
„ das Quadrat von 3 Stellen gleich $4(n^2 + 1)$
„ „ „ „ 5 „ „ $8(n^2 + 1)$
„ „ „ „ 7 „ „ $12(n^2 + 1)$
. . . .
„ „ „ „ n „ „ $2(n - 1)(n^2 + 1)$

So zeigt jedes für $n = 5$ gebildete magische Quadrat, in dessen Mittelpunkte die Zahl 13 steht, in den beiden quadratischen Einfassungen die Summen $4 . 26 = 104$ und $8 . 26 = 208$.

Die beiden Diagonalen des Quadrates bilden ein symmetrisches Kreuz mit dem Mittelpunkte; diese Figur von $2n - 1$ Punkten enthält stets die Summe $\frac{1}{2}(n - 1)(n^2 + 1)$. Auch die beiden rechtwinkligen Axen des Quadrates bilden ein solches Kreuz mit dieser Summe. Die Mittelpunkte E, G, F, H der vier Seiten des Quadrates bestimmen ein über-

eck stehendes Quadrat von $2(n-1)$ Punkten, also mit der Summe $(n-1)(n^2+1)$, welche halb so gross ist, als die Summe der quadratischen Umfangslinie des Quadrates.

Jede symmetrisch begrenzte Flächenfigur, welche $4r$ Stellen umfasst, enthält die Summe $2r(n^2+1)$. Rückt man die Umfangslinie einer solchen Fläche immer um eine Stelle weiter hinaus; so wächst die Stellenzahl der Fläche um die Stellenzahl einer symmetrischen Linienfigur, jene Stellenzahl wird also zwischen bestimmten Grenzen des Radius r der Formel $4(ar^2+br+c)$, die Summe aller Stellen in dieser Fläche also der Formel $2(ar^2+br+c)(n^2+1)$ entsprechen.

Eine Quadratfläche ist eine Fläche dieser Art. Ihre Stellenzahl nimmt von der Mittelstelle aus sukzessiv die Werthe 1, 9, 25, 49, ... an, wobei die Mittelstelle selbst als erstes quadratisches Feld mitgerechnet ist. Die Quadratflächen von der Stellenzahl 1, 3, 5, 7, ... r enthalten also in dem magischen Quadrate die Summen $\frac{1}{2}(n^2+1)$, $\frac{9}{2}(n^2+1)$, $\frac{25}{2}(n^2+1)$, $\frac{49}{2}(n^2+1)$, ... $\frac{r^2}{2}(n^2+1)$.

Beispielsweise enthalten die quadratischen Felder von der Stellenzahl 1, 3, 5 in dem magischen Quadrate für $n=5$ die Summen $\frac{1}{2}.26=13$, $\frac{9}{2}.26=117$, $\frac{25}{2}.26=325$.

Wir bemerken noch, dass wenn man eine symmetrische Figur wie $a_1\, b_1\, b_2\, d_2 \ldots$ (Fig. 3) als eine Durchdringung von lauter Rechtecken, deren Mittelpunkt in J liegt, darstellt, die vier Zahlen, welche im magischen Quadrate in den vier Ecken eines solchen Rechteckes stehen, in der natürlichen Zahlentafel, welche wir in Nr. 6 niedergeschrieben haben, an den Ecken eines Parallelogrammes stehen, dessen Mittelpunkt in dem Mittelpunkte der Tafel liegt.

Das vorstehende Gesetz der symmetrischen Figuren ist ein Begleiter des vollkommenen magischen Quadrates, aber dasselbe bestimmt nicht ein solches Quadrat, d. h. es bewirkt nicht, dass die einfachen horizontalen, vertikalen und schrägen Reihen konstante Summen bilden. Die natürliche Zahlentafel in Nr. 6 zeigt ebenfalls das Gesetz der sym-

metrischen Figuren, ohne doch ein magisches Quadrat zu sein.

9. Nach der in Nr. 2 oder nach der in Nr. 6 aufgestellten Regel ergeben sich alle möglichen vollkommenen Quadrate und auch die Grundformen von unvollkommenen Quadraten. Durch Verstellung der Reihen und durch Verschiebungen lassen sich aus den Grundformen alle sonst möglichen Nebenformen herstellen. Ausserdem giebt es für zusammengesetzte Werthe von n noch unvollkommene Quadrate, welche auf der Zerlegung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^2$ in die den Faktoren von n entsprechenden Gruppen beruhen. Ist z. B. $n = pq$, so kann man bilden

aus $1, 2, 3, \ldots p^2$ das Quadrat Q_1
„ $p^2+1, p^2+2, p^2+3, \ldots 2p^2$ das Quadrat Q_2
„ $2p^2+1, 2p^2+2, 2p^2+3, \ldots 3p^2$ das Quadrat Q_3
u. s. w.

Stellt man diese q^2 Theilquadrate $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_{q^2}$ an die Stellen eines aus den q^2 Zahlen $1, 2, 3, \ldots q^2$ gebildeten magischen Quadrates; so ergiebt sich ein magisches Quadrat aus $n^2 = p^2q^2$ Zahlen, weil alle Reihensummen jedes folgenden der Quadrate Q um den konstanten Betrag p^3 grösser sind, als die des vorhergehenden. Übrigens können die Theilquadrate $Q_1, Q_2, \ldots$ lauter verschiedene Formen haben.

Wenn man Q als ein Funktionszeichen gebraucht, um damit eine magische Anordnung zu bezeichnen; so kann Q_p das Symbol für irgend eine aus p^2 Zahlen gebildete Quadratgruppe und $Q_p Q_q$ das Symbol für das felderweis zusammengesetzte Quadrat von der Seite pq sein. Die möglichen Formen, welche das magische Quadrat von der Seite pq annehmen kann, sind dann symbolisch durch Q_{pq}, $Q_q Q_p$, $Q_p Q_q$ dargestellt. Ist $p = q$; so fallen die letzten beiden Formen in eine $Q_p Q_p$ zusammen.

Lässt sich n in die drei Faktoren p, q, r zerlegen; so bezeichnen Q_{pqr}, $Q_p Q_{qr}$, $Q_q Q_{pr}$, $Q_r Q_{pq}$, $Q_{qr} Q_p$, $Q_{pr} Q_q$, $Q_{pq} Q_r$, $Q_p Q_q Q_r$, $Q_p Q_r Q_q$, $Q_q Q_p Q_r$, $Q_q Q_r Q_p$, $Q_r Q_p Q_q$, $Q_r Q_q Q_p$ die verschiedenen zusammengesetzten Quadrate.

Beispielsweise ergiebt sich aus dem Quadrate für $n=3$ ein zusammengesetztes Quadrat für $n=3^2=9$ nach der Formel $Q_3 Q_3$ durch nachstehende Substitution

4	9	2
3	5	7
8	1	6

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Die auf der Zerlegung der Zahl n in Faktoren beruhenden magischen Quadrate bilden die Klasse, welche man die Quadrate mit symmetrischen Abtheilungen nennt.

Quadrat mit gerader Stellenzahl.

10. Wenn die Stellenzahl n gerade ist; so können die Zahlen a, b, a', b' und $ab' - a'b$ nicht sämmtlich relativ prim zu n sein: denn wenn die ersten vier ungerade sind, ist die fünfte gerade. Für ein gerades n muss also das magische Quadrat ein anderes Gesetz befolgen, als für ein ungerades n. Zur Darstellung dieses Gesetzes zeichnen wir in das Linienquadrat $ABDC$ (Fig. 6), welches die n^2 Felder einschliesst, $\frac{1}{2}n$ diagonale Doppelzüge, wovon ein jeder $2n$ Zahlen aufnimmt und aus den vier rechtwinkligen Theilen $f_1 i_1 g_1$, $f_2 i_2 g_2$, $f_3 i_3 g_3$, $f_4 i_4 g_4$ besteht, deren vier Scheitel i_1, i_2, i_3, i_4 in den Halbirunglinien GH und EF des Quadrates und in den mit den Seiten des Quadrates parallel laufenden Linien $f_2 g_4$, $f_1 g_3$, $f_4 g_2$, $f_3 g_1$ liegen. Die beiden Hauptdiagonalen AD und BC bilden einen dieser diagonalen Doppelzüge.

Zur Unterscheidung von einer anderen, später zu betrachtenden Art von diagonalen Doppelzügen nennen wir einen der eben beschriebenen ein Kreuz. Jede Hälfte eines solchen Kreuzes enthält n Zahlen, wir unterscheiden aber ver-

schiedene Hälften oder Reihen: eine diagonale Hälfte, welche aus den vier zu einer Hauptdiagonalen parallelen Strecken wie $i_1 f_1$, $i_2 f_2$, $i_3 f_3$, $i_4 f_4$ oder wie $i_1 g_1$, $i_2 g_2$, $i_3 g_3$, $i_4 g_4$ besteht, eine obere und untere Hälfte, welche aus den über oder unter der Linie EF liegenden Strecken besteht, und eine linke und rechte Hälfte, welche aus den links und rechts von der Linie GH liegenden Strecken besteht.

Ein **vollkommenes** magisches Quadrat für eine gerade Stellenzahl definiren wir jetzt als ein solches, in welchem jede horizontale Reihe, jede vertikale Reihe und jede Hälfte eines diagonalen Kreuzes dieselbe Summe $\frac{1}{2} n (n^2 + 1)$ bildet. Von welchen Kreuzen die diagonale Hälfte, die obere und untere oder die linke und rechte Hälfte gilt, wird weiter unten erörtert werden.

Wenn man um den Mittelpunkt J eines vollkommenen Quadrates $ABDC$ irgend ein anderes Quadrat zeichnet; so schneiden dessen Seiten oder ihre Verlängerungen das Kreuz AD, BC in vier, jedes andere Kreuz in acht Punkten. Im ersteren Kreuze enthalten die getroffenen vier Stellen stets die Summe $2(n^2 + 1)$ und zwar die eine Hälfte die Summe $n^2 + 1$ und die andere Hälfte die nämliche Summe $n^2 + 1$. In jedem anderen Kreuze enthalten die acht Stellen die Summe $4(n^2 + 1)$ und zwar lassen sich diese acht Stellen in zwei verschiedenen Weisen in symmetrisch liegende Hälften zerlegen, von welchen jede in ihren vier Punkten die Summe $2(n^2 + 1)$ enthält.

Hiernach enthalten die quadratischen Umfänge von innen nach aussen bestimmte gesetzlich anwachsende Summen, wie bei den in Nr. 8 erörterten Quadraten mit ungerader Seitenzahl, nämlich das Quadrat, welches

2	Stellen in jeder Seite hat, die Summe	$2(n^2 + 1)$
4	„ „ „ „ „ „ „	$6(n^2 + 1)$
6	„ „ „ „ „ „ „	$8(n^2 + 1)$
. . .	. . . .	. . .
n	„ „ „ „ „ „ „	$2(n-1)(n^2 + 1)$

Überhaupt aber enthält nach der erwähnten Eigenschaft auch hier jede Figur von $4r$ Stellen, welche sowohl für die

horizontale, als auch für die vertikale und für jede diagonale Mittellinie symmetrisch ist, welche also aus vier symmetrischen Figuren von je r Stellen besteht, die konstante Summe $2r(n^2+1)$, welche sich auf zwei symmetrische Hälften von je $2r$ Stellen mit den Summen $r(n^2+1)$ vertheilt.

Die beiden Diagonalen des Quadrates zusammen bilden jetzt stets ein symmetrisches Kreuz von $2n = 4m$ Punkten, welches die Summe $n(n^2+1)$ enthält.

Der allgemeinen Lösung des Problems schicken wir einige Sätze voran, welche leicht zu erweisen sind.

11. Wenn man die Stellen irgend eines Kreuzes durch diejenigen Zahlen ausfüllt, welche darauf fallen, indem man von irgend einer Ecke, z. B. von B aus, die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^2$ in natürlicher Reihenfolge in das Quadrat $ABDC$ einzählt (wobei man immer in horizontaler Richtung zählt und sukzessiv in vertikaler Richtung von einer Horizontalreihe zur nächstfolgenden übergeht); so erhält man in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe je zwei Zahlen. Wenn man ebenso ein zweites Kreuz von der der ersteren Ecke diametral gegenüberliegenden Ecke, also jetzt von C aus, einzählt; so ergeben sich in jeder horizontalen und vertikalen Reihe nochmals zwei, mit den ersteren also überhaupt vier Zahlen. Diese vier Zahlen bilden in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe die konstante Summe $2(n^2+1)$.

In jedem der beiden voll eingezählten Kreuze bildet jede diagonale Hälfte, welche n Zahlen enthält, die konstante Summe $\frac{1}{2}n(n^2+1)$, welche der Reihensumme des magischen Quadrates entspricht. Zwei Kreuze dieser Art nennen wir einen Zwilling.

Zur Erleichterung der Einzählung gewisser Stellen aus einer bestimmten Ecke kann man diese Stellen vorher mit demjenigen kleinen Buchstaben ausfüllen, welcher dem an jener Ecke stehenden grossen Buchstaben entspricht. Hiernach würden die mit a, b, c, d markirten Stellen solche sein, welche resp. aus der Ecke A, B, C, D eingezählt werden sollen.

12. Der vorstehende Satz reicht aus, um ein magisches Quadrat für den Fall zu bilden, dass die Stellenzahl n von der Form $4m$, also das Doppelte einer geraden Zahl $2m$ ist. Denn man braucht die Gesammtmenge $2m$ der in Betracht kommenden Kreuze nur in lauter Zwillinge zu zerlegen oder beliebige m Kreuze aus irgend einer Ecke und die übrigen m aus der diametral gegenüber liegenden Ecke einzuzählen. Man kann auch beliebig viel Kreuze aus der Ecke A und ebenso viel aus der Ecke D, von dem Reste aber ebenso viel aus B wie aus C einzählen. Jedes so gewonnene magische Quadrat ist ein vollkommenes.

Beispielsweise kann man für $n = 8$ in dem Linienquadrate $ABDC$ die nachstehenden vier leicht erkennbaren, aus den beiden Ecken A und D zu zählenden Kreuze bilden, welche das danebenstehende magische Quadrat ergeben.

A							B
a	d	a	d	d	a	d	a
d	a	d	a	a	d	a	d
a	d	a	d	d	a	d	a
d	a	d	a	a	d	a	d
d	a	d	a	a	d	a	d
a	d	a	d	d	a	d	a
d	a	d	a	a	d	a	d
a	d	a	d	d	a	d	a
C							D

A							B
1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64
C							D

Zählt man von diesen Kreuzen je eins aus A und D, sowie aus B und C; so ergiebt sich folgende Gruppirung

A							B
a	d	b	c	c	b	d	a
c	a	d	b	b	d	a	c
b	c	a	d	d	a	c	b
d	b	c	a	a	c	b	d
d	b	c	a	a	c	b	d
b	c	a	d	d	a	c	b
c	a	d	b	b	d	a	c
a	d	b	c	c	b	d	a
C							D

A							B
1	63	6	60	61	3	58	8
49	10	54	13	12	51	15	56
24	42	19	45	44	22	47	17
40	31	35	28	29	38	26	33
32	39	27	36	37	30	34	25
48	18	43	21	20	46	23	41
9	50	14	53	52	11	55	16
57	7	62	4	5	59	2	64
C							D

Für $n = 4$ erhält man das Quadrat

a	d	d	a	1	15	14	4
d	a	a	d	12	6	7	9
d	a	a	d	8	10	11	5
a	d	d	a	13	3	2	16

Die im mathematischen Wörterbuche von Klügel, vierter Theil, S. 21, sowie in dem mathematischen Wörterbuche von Hoffmann und Natani, 5. Bd., S. 12, mitgetheilte Auflösung des Falles $n = 4m$ ist nur eine singuläre, welche der ersten der beiden vorstehenden Konstruktionen aus den beiden Ecken A und D entspricht, ohne jedoch ein Kriterium für ein vollkommenes Quadrat zu enthalten.

Wenngleich unsere Auflösung für den Fall $n = 4m$ allgemeiner ist; so ist sie doch nicht erschöpfend. Nur für $n = 4$ erschöpft sie die Aufgabe, für grössere Werthe von n jedoch nicht, wie wir alsbald zeigen werden. Zuvor erörtern wir folgenden Satz.

13. Wir behandeln drei Kreuze in nachstehender Weise. Das erste Kreuz zerlegen wir nach Fig. 7 durch EF in eine obere und eine untere Hälfte und markiren die Stellen dieser beiden Hälften mit zwei Buchstaben, welche irgend zwei auf derselben Seite von EF liegenden Ecken entsprechen, also, wie man will, entweder mit d und c (wie in der Figur), oder auch mit b und a, oder mit a und b, oder mit c und d. Das zweite Kreuz zerlegen wir nach Fig. 8 durch GH in eine linke und rechte Hälfte und markiren diese beiden Hälften nach demselben Prinzipe mit zwei Buchstaben, welche irgend zwei auf derselben Seite von GH liegenden Ecken entsprechen, also, wie man will, entweder mit d und b (wie in der Figur), oder auch mit a und c, oder mit c und a, oder mit b und d.

Infolge dieser Bezeichnung werden in einem Quadranten zwei gleiche Buchstaben zusammentreffen (nach den Fig. 7 und 8 werden in dem Quadranten $AGJE$ beide Kreuzviertel den Buchstaben d tragen, d. h. diese beiden Kreuzviertel werden aus derselben Ecke D gezählt werden). Was nun das dritte Kreuz betrifft, so lassen wir dasselbe ungetheilt

und markiren es mit dem Buchstaben derjenigen Ecke, welche der zuletzt gedachten diametral gegenüber liegt (nach den Fig. 7 und 8 also mit dem Buchstaben a).

Wenn die Hälften der ersten beiden Kreuze und das volle dritte Kreuz aus den bezeichneten Ecken eingezählt werden; so füllen sich dadurch in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe sechs Stellen mit Zahlen aus, welche die konstante Summe $3(n^2+1)$ bilden.

Jedes der drei Kreuze selbst, welches in allen Stellen ausgefüllt ist, bildet in jeder seiner Hälften die konstante Summe $\frac{1}{2}n(n^2+1)$. Was die Hälften mit konstanter Summe betrifft; so sind es für ein aus einer einzigen Ecke gezähltes oder für ein volles Kreuz die mit einer Hauptdiagonalen AD oder BC parallelen Theile, für ein durch die Horizontale EF nach Fig. 7 getheiltes Kreuz jedoch die links und rechts von der Vertikalen GH liegenden Theile und für ein durch die Vertikale GH nach Fig. 8 getheiltes Kreuz die über und unter der Horizontalen EF liegenden Theile.

Drei in vorstehender Weise markirte Kreuze nennen wir einen Drilling.

14. Der vorstehende Satz enthält die vollständige Lösung für $n = 6 = 2.3$, z. B. in folgender Gruppirung

A					*B*	*A*					*B*
a	*d*	*d*	*b*	*d*	*a*	1	35	34	3	32	6
d	*a*	*d*	*d*	*a*	*b*	30	8	28	27	11	7
d	*d*	*a*	*a*	*b*	*d*	24	23	15	16	14	19
c	*d*	*a*	*a*	*b*	*c*	13	17	21	22	20	18
d	*a*	*c*	*c*	*a*	*b*	12	26	9	10	29	25
a	*c*	*d*	*b*	*c*	*a*	31	2	4	33	5	36
C					*D*	*C*					*D*

15. Mit Hülfe der beiden Sätze Nr. 11 und 13 lässt sich für jeden geraden Werth von n ein vollkommenes magisches Quadrat konstruiren. Man braucht nur die Zahl $\frac{1}{2}n$ in irgend einer Weise in der Form $2p + 3q$ darzustellen, also die Gesammtmenge aller Kreuze in Zwillinge und Drillinge zu zerlegen, und sodann die p Zwillinge nach Nr. 11 und die q Drillinge nach Nr. 13 zu behandeln (wobei jeder der p Zwil-

linge und jeder der q Drillinge aus besonderen Ecken gezählt werden kann).

Jede gerade Zahl, welche das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, kann in der Form $n = 2(2p + 3)$ dargestellt werden. Wenn man also einen Drilling nach Nr. 13 und die übrig bleibenden p Zwillinge nach Nr. 11 behandelt; so erhält man eine singuläre Auflösung und von dieser singulären Auflösung einen speziellen Fall, wenn man jeden der p Zwillinge aus denselben diametral gegenüberliegenden Punkten A und D zählt. Da in dem Drillinge ein ganzes Kreuz aus einer Ecke gezählt werden muss; so kann man, wenn man diese Ecke zu derjenigen wählt, aus welcher man je ein Kreuz der p Zwillinge zählt, die letztere spezielle Auflösung noch weiter und zwar dahin spezialisiren, dass man ein Kreuz halb aus D und halb aus C, ein Kreuz halb aus D und halb aus B, $p + 1$ ganze Kreuze aus A und p ganze Kreuze aus D zählt. Auf dieser speziellen und singulären Lösung beruht die im mathematischen Wörterbuche von Klügel, 4. Theil, S. 24, angegebene Regel, welche übrigens im Allgemeinen nur unvollkommene Quadrate liefert, auch in ihrer zweiten Alternative falsch ist und mit demselben Fehler in das mathematische Wörterbuch von Hoffmann und Natani, 5. Bd., S. 14, übergegangen ist.

Beispielsweise kann man für $n = 10 = 2(2 + 3)$ folgende Gruppirung vornehmen

A									*B*
a	*d*	*a*	*d*	*d*	*b*	*d*	*a*	*d*	*a*
d	*a*	*d*	*a*	*d*	*d*	*a*	*d*	*a*	*b*
d	*d*	*a*	*d*	*a*	*a*	*d*	*a*	*b*	*d*
a	*d*	*d*	*a*	*d*	*d*	*a*	*b*	*d*	*a*
d	*a*	*d*	*d*	*a*	*a*	*b*	*d*	*a*	*d*
d	*a*	*c*	*d*	*a*	*a*	*b*	*c*	*a*	*d*
a	*c*	*d*	*a*	*d*	*d*	*a*	*b*	*c*	*a*
c	*d*	*a*	*d*	*a*	*a*	*d*	*a*	*b*	*c*
d	*a*	*d*	*a*	*c*	*c*	*a*	*d*	*a*	*b*
a	*d*	*a*	*c*	*d*	*b*	*c*	*a*	*d*	*a*
C									*D*

1	99	3	97	96	5	94	8	92	10
90	12	88	14	86	85	17	83	19	11
80	79	23	77	25	26	74	28	22	71
31	69	68	34	66	65	37	33	62	40
60	42	58	57	45	46	44	53	49	51
50	52	43	47	55	56	54	48	59	41
61	32	38	64	36	35	67	63	39	70
21	29	73	27	75	76	24	78	72	30
20	82	18	84	15	16	87	13	89	81
91	9	93	4	6	95	7	98	2	100

16. Wenn man ein Kreuz durch die beiden Mittellinien EF und GH in vier Quadranten zerlegt und die in jedem Quadranten liegenden Stellen aus einer besonderen Ecke A, B, C oder D einzählt; so entstehen Kreuze, welche aus je vier Vierteln zusammengesetzt sind und welche sich zu Vierlingen gruppiren. Ein Vierling ist ein Komplex von vier Kreuzen, welcher in jeder horizontalen und vertikalen Reihe acht Zahlen mit der konstanten Summe $4(n^2+1)$ enthält.

Um das Gesetz aller aus ganzen, gehälftèten und geviertheilten Kreuzen bestehenden Zwillinge, Drillinge und Vierlinge übersichtlich darzustellen, bezeichnen wir ein ganzes Kreuz mit dem kleinen Buchstaben, welcher der Ecke A, B, C oder D entspricht, aus welcher dieses Kreuz gezählt werden soll, also z. B. mit b ein aus der Ecke B gezähltes ganzes Kreuz. Ein durch die Halbirungslinie GH gehälftetes Kreuz bezeichnen wir durch die Nebeneinanderstellung der Buchstaben der beiden Zählecken, also z. B. durch db das von D und B aus gezählte Kreuz mit der Halbirungslinie GH; zur Bezeichnung eines durch die Halbirungslinie EF gehälfteten Kreuzes stellen wir die Buchstaben der beiden Zählecken untereinander, versinnlichen also z. B. durch $\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}$ das von A und C aus gezählte Kreuz mit der Halbirungslinie EF. Ein geviertheiltes Kreuz symbolisiren wir durch die vier im Quadrate aufgestellten Zähl-

ecken, bezeichnen also z. B. durch $\genfrac{}{}{0pt}{}{bc}{ad}$ das aus den Ecken B, C, D, A zu zählende geviertheilte Kreuz.

Da in einem Kreuze sich niemals zwei Zahlen wiederholen dürfen; so liefert nicht jede beliebige Zusammenstellung von zwei oder vier Buchstaben ein brauchbares Kreuz. So sind z. B. ab, ad, ba, bc, cb, cd, da, dc ganz unzulässige Zusammenstellungen und nur ac, bd, ca, db bezeichnen das durch die Linie GH halbirte Kreuz.

Unter den gehälfteten und unter den geviertheilten Kreuzen giebt es einige, welche in jeder horizontalen und vertikalen Linie dieselbe Summe erzeugen, also einander in einer Gruppirung vertreten können. Diese äquivalenten Kreuze sind aus folgenden Gleichungen zu ersehen

$$ac = ca \qquad bd = db$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b} = \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{c}{d} = \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{c}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{ac}{db} = \genfrac{}{}{0pt}{}{bd}{ca} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{bc}{ad} = \genfrac{}{}{0pt}{}{da}{cb}$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{cb}{da} = \genfrac{}{}{0pt}{}{ad}{bc} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{db}{ac} = \genfrac{}{}{0pt}{}{ca}{bd}$$

Alle möglichen Zwillinge, welche die horizontale und vertikale Summe $2(n^2+1)$ liefern, sind nun folgende, wobei wir die Kombination durch das Pluszeichen versinnlichen:

aus ganzen Kreuzen

$$a + d \text{ und } b + c$$

aus gehälfteten Kreuzen

$$ac + bd \text{ und } \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b} + \genfrac{}{}{0pt}{}{c}{d}$$

Zwillinge, in welchen geviertheilte Kreuze erschienen, giebt es nicht.

Alle möglichen Drillinge, welche die horizontale und vertikale Summe $3(n^2+1)$ liefern, sind in folgenden Formeln enthalten

$$a + db + \genfrac{}{}{0pt}{}{d}{c} \qquad b + ca + \genfrac{}{}{0pt}{}{c}{d}$$

$$c + bd + \genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a} \qquad d + ac + \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$$

Drillinge, in welchen geviertheilte Kreuze erschienen, giebt es nicht.

Was die Vierlinge betrifft, welche die horizontale und vertikale Summe $4(n^2 + 1)$ liefern; so ist die Wahl der Kreuze eines Vierlings nicht mehr eine ganz beliebige, sondern an die Bedingung geknüpft, dass dasselbe aus zwei Paaren bestehe, in welchen die beiden Kreuze gleichen Abstand von einander haben, wenn also z. B. das erste Kreuz durch die r-te Stelle, das zweite Kreuz durch die $(r+s)$-te Stelle und das dritte Kreuz durch die t-te Stelle einer horizontalen oder vertikalen Seite des Quadrates geht, das vierte Kreuz durch die $(t+s)$-te Stelle gehe. Während also die Lage von drei Kreuzen willkürlich ist, ist die des vierten von jenen abhängig. Unter Voraussetzung nun, dass die vier Kreuze dieser Bedingung gemäss gewählt sind, behält man für die Einzählung der Kreuze eines Vierlings folgende Formeln, bei welchen die Reihenfolge der vier Kreuze festgehalten werden muss

$$\frac{ad}{da} + \frac{da}{ad} + \frac{da}{ad} + \frac{ad}{da}$$

$$\frac{bc}{cb} + \frac{cb}{bc} + \frac{cb}{bc} + \frac{bc}{cb}$$

$$\frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad} + \frac{da}{cb} + \frac{cb}{da}$$

$$\frac{ac}{db} + \frac{db}{ac} + \frac{ca}{bd} + \frac{bd}{ca}$$

In dem letzten dieser vier Vierlinge dürfen jedoch die beiden Diagonalen AD, BC nicht als Kreuz erscheinen.

Vierlinge, welche ganze oder gehälftete Kreuze enthalten, zerfallen in zwei Zwillinge. Es giebt also keine echten Vierlinge mit ganzen oder gehälfteten Kreuzen. Im Vorstehenden sind sowohl für die Zwillinge, als auch für die Drillinge und für die Vierlinge je vier Formeln gegeben. In diesen Formeln kann die Einzählung jedes einzelnen Kreuzes durch eine nach den vorher aufgestellten Formeln äquivalente Einzählung ersetzt werden, wodurch sich die Zahl der möglichen Gruppirungen ansehnlich vermehrt.

Gruppen von mehr als vier Kreuzen (Fünflinge, Sechslinge u. s. w.) kommen nicht in Betracht; dieselben zerfallen sämmtlich in Zwillinge, Drillinge und Vierlinge.

17. Der letzte Satz über die Vierlinge vervollständigt nun die generelle Lösung des Problems. Man gruppirt die Gesammtmenge aller Kreuze in beliebiger Weise nach Zwillingen, Drillingen und Vierlingen, indem man die Zahl $\frac{1}{2}n$ in irgend einer Weise nach der Formel $2p + 3q + 4r$ darstellt, und zählt sodann jeden Zwilling, jeden Drilling und jeden Vierling nach irgend einer der in vorstehender Nummer durch Formeln erläuterten Regeln ein. (Da die Vierlinge eine gewisse Abhängigkeit ihrer vier Kreuze bedingen; so müssen dieselben vorweg gebildet werden.)

So kann man für $n = 24$ die Zahl 12 in irgend einer der nachstehenden Weisen

$$\begin{aligned} 12 &= 4.3 = 2.2 + 4.2 = 2.1 + 3.2 + 4.1 = 2.4 + 4.1 \\ &= 3.4 = 2.3 + 3.2 = 2.6 \end{aligned}$$

in drei Vierlinge oder in zwei Zwillinge und zwei Vierlinge, oder in einen Zwilling, zwei Drillinge und einen Vierling u. s. w. zerlegen und darnach das magische Quadrat herstellen.

Diese Konstruktion vollkommener magischer Quadrate mit gerader Stellenzahl erlangt ihren höchsten Grad von Allgemeinheit durch die Bemerkung, dass für jeden Zwilling, jeden Drilling und jeden Vierling irgend eine beliebige Ecke des Quadrates zum Anfangspunkte und dass, von dieser Ecke ausgehend, sowohl die horizontale, als auch vertikale Richtung als die primäre Zählrichtung angenommen werden kann.

18. Ein nach Nr. 10 konstruirtes, in Fig. 6 dargestelltes Kreuz bildet sowohl für die horizontale Mittellinie EF, als auch für die vertikale Mittellinie GH eine symmetrische Figur. Diese beiden Figuren sind aber nicht gleich; das Kreuz ist nicht für die Diagonale AD und BC symmetrisch (mit alleiniger Ausnahme des in diese Diagonalen selbst fallenden Kreuzes). Es lassen sich Linienzüge verzeichnen, welche sowohl für die Mittellinien EF und GH, als auch für die Diagonalen AD und BC symmetrisch sind. Ein

solcher Zug besteht nach Fig. 9 aus einem übereck stehenden Quadrate *efgh* (dessen Seiten mit den Diagonalen *AD*, *BC* parallel laufen) und den vier Abschnitten $e_1 g_1$, $g_2 f_2$, $f_4 h_4$, $h_3 e_3$ eines grösseren übereck stehenden Quadrates; diese Abschnitte sind so gezeichnet, dass die Punkte e_1 und f_2 in der durch g gehenden Horizontalen oder die Punkte g_1 und h_3 in der durch e gehenden Vertikalen liegen. Diese Linienzüge wollen wir kurz Ringe nennen. Der mittelste Ring reduzirt sich auf das Quadrat *EGFH*, welches in jeder Seite $\frac{1}{2}n$, im Ganzen $2n$ Zahlen in seinem Umfange aufnimmt. Die Hauptdiagonalen *AD* und *BC* bilden keine Theile eines Ringes.

Ein Ring hat dieselben Eigenschaften wie ein in Nr. 11 beschriebenes Kreuz, überhaupt wie ein diagonaler Doppelzug, dessen Hälfte n Zahlen enthält. Wir unterscheiden auch hier verschiedene Hälften oder Reihen: eine diagonale Hälfte, welche aus den vier zu einer Hauptdiagonalen parallelen Strecken besteht, eine obere und untere Hälfte, welche durch die Horizontale *EF* geschieden sind, und eine linke und rechte Hälfte, welche durch die Vertikale *GH* geschieden sind.

Unter einem vollkommenen magischen Quadrate verstehen wir jetzt ein solches, in welchem jede horizontale Reihe, jede vertikale Reihe und jede Hälfte eines Ringes dieselbe Summe $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ bildet. Obwohl in einem solchen magischen Quadrate nicht die Hauptdiagonalen, sondern die beiden Strecken $EG + HF$ und $GF + EH$ jene konstante Summe bilden; so hat dasselbe doch wegen der allseitig symmetrischen Figur der ringförmigen Reihen eine regelmässigere Gestalt, als das aus Kreuzen konstruirte Quadrat.

Ausserdem gelten hinsichtlich der quadratischen Umfänge und der symmetrischen Figuren in einem aus Ringen konstruirten vollkommenen Quadrate die am Ende von Nr. 10 aufgeführten Sätze.

Wenn das magische Quadrat nach Ringen gebildet wird; so treten für die Zwillings-, Drillings- und Vierlingsringe dieselben Sätze, welche in Nr. 11 bis 16 von den Zwillings-, Drillings- und Vierlingskreuzen vorgetragen sind, in Kraft.

Übrigens fällt für die Vierlingsringe die in Nr. 16 angeführte Ausnahme fort.

Wenn wir beispielsweise zur Herstellung des magischen Quadrates für $n = 8$ die vier Ringe als einen Vierling nach der Formel

$$\frac{ad}{bc} + \frac{bc}{ad} + \frac{da}{cb} + \frac{cb}{da}$$

konstruiren und den ersten, zweiten, dritten, vierten Ring in der vierten, dritten, zweiten, ersten Stelle der obersten Horizontalreihe beginnen; so ergiebt sich folgende Gruppirung

c	*d*	*b*	*a*	*d*	*c*	*a*	*b*	57	63	6	4	60	62	7	1
d	*b*	*a*	*c*	*b*	*d*	*c*	*a*	56	15	11	52	12	51	55	16
b	*a*	*c*	*d*	*a*	*b*	*d*	*c*	24	18	43	45	21	19	42	48
a	*c*	*d*	*b*	*c*	*a*	*b*	*d*	25	34	38	29	37	30	26	33
b	*d*	*c*	*a*	*d*	*b*	*a*	*c*	40	31	27	36	28	35	39	32
a	*b*	*d*	*c*	*b*	*a*	*c*	*d*	41	47	22	20	44	46	23	17
c	*a*	*b*	*d*	*a*	*c*	*d*	*b*	9	50	54	13	53	14	10	49
d	*c*	*a*	*b*	*c*	*d*	*b*	*a*	8	2	59	61	5	3	58	64

Auflösung mittelst Koordinaten.

19. Wenn a eine zu n relativ prime Zahl ist; so wird eine n-gliedrige Reihe, welche mit einer der Zahlen $1, 2, \ldots n$, z. B. mit der Zahl 1 beginnt und mit der Differenz a fortschreitet, und worin jede den Werth n überschreitende Zahl durch ihren kleinsten positiven Rest nach n ersetzt ist, sämmtliche Zahlen $1, 2, \ldots n$ in einer gewissen Folge enthalten. Ist a' eine zweite zu n relativ prime Zahl und aus ihr, als Differenz, eine ähnliche, vertikal gestellte Reihe mit demselben Anfangsgliede gebildet, hierauf aber aus dieser horizontalen und vertikalen Reihe ein Quadrat in der Weise ergänzt, dass jede in der vertikalen Linie stehende Zahl zum Anfangsgliede einer horizontalen Reihe genommen ist, in welcher die Zahlen genau in der Ordnung der ersten Reihe aufeinander folgen; so werden in jeder horizontalen und in jeder vertikalen Reihe alle n Zahlen $1, 2, \ldots n$ vorkommen:

man kann jedoch nicht behaupten, dass diess auch in den diagonalen Reihen der Fall sei. So hat man z. B. für $n = 5$, $a = 2$, $a' = 3$

1	3	5	2	4
4	1	3	5	2
2	4	1	3	5
5	2	4	1	3
3	5	2	4	1

Damit in der vom Anfangsgliede auslaufenden Diagonalen ebenfalls alle n Zahlen erscheinen, muss nicht allein a und a', sondern auch $a + a'$ relativ prim zu n sein (was im vorstehenden Beispiele nicht der Fall ist). Damit endlich in der vom Endgliede ausgehenden Diagonalen alle n Zahlen vorkommen, muss $a - a'$ relativ prim zu n sein (was im vorstehenden Beispiele der Fall ist).

Die vier Bedingungen, dass a, a', $a + a'$, $a - a'$ relativ prim zu n seien, sind unerfüllbar, wenn n den Faktor 2 oder 3 enthält: sie sind aber stets erfüllbar, wenn diess nicht der Fall ist, z. B. für $n = 5$, indem man unter Anderem $a = 1$, $a' = 2$ nimmt, was folgendes Quadrat ergiebt

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Die vorstehende Konstruktion bleibt offenbar noch gültig, wenn man an die Stelle der n natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots n$ beliebige n Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ setzt und dieselben so ordnet, dass die Zahlen des vorstehenden Quadrates die Zeiger der letzteren Grössen bezeichnen. Man kann daher auch statt der natürlichen Zahlenreihe $1, 2, \ldots n$ eine beliebige Reihenfolge dieser Zahlen als Grundreihe annehmen, z. B. für $n = 5$ aus der Reihe 2, 5, 1, 4, 3 nach dem letzteren Gesetze folgendes Quadrat bilden

2	5	1	4	3
1	4	3	2	5
3	2	5	1	4
5	1	4	3	2
4	3	2	5	1

Betrachten wir die n^2 Zahlen eines solchen Quadrates als eine Gruppe von Abszissen, zu welchem Zwecke es nützlich, wenn auch nicht nothwendig ist, alle Zahlen um 1 zu verkleinern, also die Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots n-1$ zu Grunde zu legen und demgemäss statt der Zahl n, wo sie erscheint, die Zahl 0 als kleinsten Rest einzuführen.

Denken wir uns einer jeden Abszisse eine Ordinate aus eben derselben Zahlenreihe hinzugefügt oder das gebildete Quadrat mit einem ähnlichen Quadrate überdeckt, so dass an die Stellen der einfachen Zahlen $0, 1, \ldots n-1$ die Kombinationen aus je zwei dieser Zahlen treten. Sind b, b' die Differenzen für die Ordinatenreihen; so müssen dieselben, damit in allen horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihen alle n Ordinaten erscheinen, den obigen Bedingungen entsprechen, d. h. b, b', $b \pm b'$ müssen relativ prim zu n sein. Damit aber alle Kombinationen des Quadrates verschieden ausfallen, muss nun noch nach Nr. 2 die Bedingung erfüllt werden, dass $ab' - a'b$ relativ prim zu n sei. Diess kann für $n=5$ durch die schon in Nr. 2 gebrauchten Werthe $a=1, a'=2$, $b=-3$, $b'=1$ geschehen. Dieselben liefern folgendes Quadrat, worin wir die Abszisse x und die Ordinate y einer jeden Kombination xy unmittelbar nebeneinander geschrieben haben

00	12	24	31	43
21	33	40	02	14
42	04	11	23	30
13	20	32	44	01
34	41	03	10	22

Ein Quadrat der vorstehenden Art bezeichnen wir als eine magische Koordinatentafel. Wenn man darin jeder Abszisse x ihren natürlichen Werth x, jeder Abszisse y aber

den Werth yn, der Kombination xy also den Werth $x + yn$ verleihet; so stellt die Tafel sofort ein magisches Quadrat der Zahlen $0, 1, 2, \ldots (n-1)^2$, und wenn man alle Kombinationen um eine Einheit vergrössert, ein magisches Quadrat der Zahlen $1, 2, \ldots n^2$ dar. Dieses Quadrat ist ein vollkommenes, wenn die Grundreihe, aus welcher die Koordinatentafel gebildet worden, die natürliche Zahlenreihe $1, 2, \ldots n$ ist.

Die magische Koordinatentafel lässt sich aber noch in einer anderen Weise in ein magisches Quadrat überführen. Stellt man sich nämlich vor, der Ort eines magischen Quadrates, welcher vom Anfangspunkte A aus in der horizontalen Richtung AB die Abszisse x und in der vertikalen Richtung AC die Ordinate y hat, sei nach seiner geometrischen Lage durch xy bezeichnet, so dass also alle diese Örter für $n = 5$ durch die natürliche

Ortstafel					oder Zahlentafel				
00	10	20	30	40	1	2	3	4	5
01	11	21	31	41	6	7	8	9	10
02	12	22	32	42	11	12	13	14	15
03	13	23	33	43	16	17	18	19	20
04	14	24	34	44	21	22	23	24	25

markirt sind. Deckt man diese natürliche Orts- oder Zahlentafel auf die magische Koordinatentafel und schreibt die bedeckende Zahl an den Ort, welcher durch die bedeckte Kombination angezeigt wird; so erhält man ebenfalls ein magisches Quadrat, z. B. im vorstehenden Falle dieses

1	24	17	15	8
20	13	6	4	22
9	2	25	18	11
23	16	14	7	5
12	10	3	21	19

Was den von vorstehender Konstruktion ausgeschlossenen Fall eines ungeraden, durch 3 theilbaren Werthes von n betrifft; so wird die Abszissentafel, wenn a und a' relativ prim zu n sind, in jeder horizontalen und vertikalen Reihe

alle Zahlen 1, 2, ... n enthalten. Setzt man nun in den Mittelpunkt die Zahl $\frac{1}{2}(n+1)$, indem man das Quadrat von diesem Punkte aus vorwärts und rückwärts, sowie abwärts und aufwärts gehend nach den Differenzen a und a' aus der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, ... n konstruirt; so wird jede Diagonale nach Nr. 3 zwar nicht alle Zahlen 1, 2, ... n, wohl aber die Summe aller dieser Zahlen $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ enthalten.

Kombinirt man mit dieser Abszissentafel eine mit den Differenzen b und b' ähnlich gebildete Ordinatentafel; so wird jede horizontale und jede vertikale Reihe verschiedene Kombinationen enthalten. Damit aber auch jede Diagonale verschiedene Kombinationen enthält, müssen die Grössen a, a' und b, b' so gewählt sein, dass sich $a+a'$ von $b+b'$ und dass sich $a-a'$ von $b-b'$ (oder vielmehr der kleinste positive Rest davon) unterscheidet oder, was dasselbe ist, dass $a-b$ weder gleich $a'-b'$, noch gleich $b'-a'$, also verschieden von $\pm(a'-b')$ ist. Nimmt man z. B. für $n=9$ die Werthe $a=1$, $a'=1$, $b=1$, $b'=2$; so ergiebt sich die vollkommene magische Koordinatentafel

62	73	84	95	16	27	38	49	51
74	85	96	17	28	39	41	52	63
86	97	18	29	31	42	53	64	75
98	19	21	32	43	54	65	76	87
11	22	33	44	55	66	77	88	99
23	34	45	56	67	78	89	91	12
35	46	57	68	79	81	92	13	24
47	58	69	71	82	93	14	25	36
59	61	72	83	94	15	26	37	48

Diese Tafel kann sofort als ein magisches Quadrat aufgefasst, auch nach der vorhergehenden Nummer in ein solches Quadrat übertragen werden.

Das vorstehende Gesetz gilt nicht allein für eine durch 3 theilbare, sondern für jede ungerade Zahl n. Übrigens kann dasselbe, wenn man kein vollkommenes Quadrat ver-

langt, auf jede willkürliche Folge der Zahlen in der Grundreihe, in deren Mitte die Zahl $\frac{1}{2}(n+1)$ steht, gestützt werden.

20. Es bleiben jetzt die geraden Werthe von n zu berücksichtigen. Ist $n = 2m$ das Doppelte einer ungeraden Zahl m; so zerlegen wir das Quadrat der n^2 Zahlen in vier symmetrische Figuren, von welchen eine jede in mehreren Quadranten des geometrischen Quadrates liegen kann, welche wir aber in einem Quadranten der magischen Koordinatentafel folgendermaassen zusammenstellen. Die n Zahlen 0, 1, 2, ... $(n-1)$ zerfallen in m Paare, deren Glieder gleich weit von den Ecken dieser Reihen abstehen, also die Summe $n-1$ bilden. Diese Paare sind 0, $(n-1)$, ferner 1, $(n-2)$, ferner 2, $(n-3)$ u. s. w. Wir wählen aus jedem dieser Paare eine Zahl, also im Ganzen m Zahlen, welche in dem ersten Quadranten dieser Tafel die Rolle der Abszissen x spielen sollen, während die übrigen m Zahlen die Rolle der Ordinaten y übernehmen. Jetzt stellen wir nach der obigen Regel aus diesen m Abszissen, indem wir sie in einer beliebigen Reihenfolge ordnen, sowie aus den beliebig geordneten m Ordinaten eine Koordinatentafel von m^2 Zahlen auf, was stets möglich ist, da m eine ungerade Zahl ist. Diese Tafel gilt als erster Quadrant AJ der Gesammttafel. Den zweiten Quadranten BJ stellen wir aus dem ersten her, indem wir die Ordinaten beibehalten, aber die Abszissen in ihre Ergänzungen zu $n-1$ verwandeln. Den dritten Quadranten CJ bilden wir aus dem ersten, indem wir die Abszissen beibehalten, aber die Ordinaten in ihre Ergänzungen zu $n-1$ verwandeln. Der vierte Quadrant DJ entsteht aus dem dritten durch Verwandlung der Abszissen oder aus dem zweiten durch Verwandlung der Ordinaten oder aus dem ersten durch Verwandlung der Abszissen und Ordinaten. Nimmt man z. B. für $n = 6$ und den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, welche die drei Paare 0,5 — 1,4 — 2,3 bilden, die drei Zahlen 0, 3, 4 zu den Abszissen und die drei Zahlen 1, 2, 5 zu den Ordinaten des ersten Quadranten; so kann man folgende magische Tafel bilden

01	32	45	51	22	15
$\underline{4}2$	$\underline{05}$	$\underline{3}1$	$\underline{12}$	$\underline{5}5$	$\underline{21}$
$3\underline{5}$	$\underline{41}$	$\underline{02}$	$2\underline{5}$	$\underline{11}$	$\underline{52}$
04	33	40	54	23	10
$\underline{4}3$	$\underline{00}$	$\underline{3}4$	$\underline{13}$	$\underline{5}0$	$\underline{24}$
$\underline{30}$	$4\underline{4}$	$0\underline{3}$	$\underline{20}$	$1\underline{4}$	$5\underline{3}$

Diese magische Tafel, in welcher man auch die Abszissen und Ordinaten miteinander vertauschen kann, enthält unzweifelhaft lauter verschiedene, in vier symmetrischen Figuren vertheilte Kombinationen und die ersten Horizontalreihen ihrer vier Quadranten, sowie die zweiten Reihen, die dritten Reihen u. s. w. bilden m Züge, welche an die Stelle der früher betrachteten Kreuze oder Ringe gesetzt werden können. Gruppirt man diese Züge nach Zwillingen, Drillingen und Vierlingen und zählt dieselben aus den vier Ecken des Quadrates nach den dafür gegebenen Formeln ein (wobei man für jeden Zwilling, jeden Drilling und jeden Vierling irgend eine beliebige Ecke des Quadrates zum Anfangspunkte und die horizontale oder die vertikale Richtung zur Grundrichtung der Zählung annehmen kann); so erhält man ein magisches Quadrat, welches nicht nothwendig vollkommen ist.

Konstruirt man dieses Quadrat beispielsweise nach der Formel des Drillings $a + db + \frac{d}{c}$, indem man die ersten, zweiten, dritten Reihen der Tafel als ersten, zweiten, dritten Zug annimmt; so ergiebt sich

d	*a*	*d*	*d*	*a*	*b*	36	2	34	33	5	1
a	*d*	*d*	*b*	*d*	*a*	7	29	28	9	26	12
d	*d*	*a*	*a*	*b*	*d*	24	23	15	16	14	19
c	*d*	*a*	*a*	*b*	*c*	13	17	21	22	20	18
a	*c*	*d*	*b*	*c*	*a*	25	8	10	27	11	30
d	*a*	*c*	*c*	*a*	*b*	6	32	3	4	35	31

Wenn man beachtet, dass die Einzählung aus der Ecke A keine Änderung an der Kombination xy, welche der eingezählten Stelle angehört, hervorbringt, dass aber die Einzählung aus der Ecke B den Effekt hat, die an der eingezählten Stelle in der natürlichen Koordinatentafel stehende Kombination xy in eine andere $(n-1-x)y$ zu verwandeln, deren Abszisse die Ergänzung von x zu $n-1$ bildet, dass ferner durch die Einzählung aus der Ecke C die Kombination xy in eine andere $x(n-1-y)$ verwandelt wird, deren Ordinate die Ergänzung von y zu $n-1$ bildet, und dass endlich durch die Einzählung aus der Ecke D die Kombination xy in eine andere $(n-1-x)(n-1-y)$ verwandelt wird, deren Abszisse und Ordinate die Ergänzung von x und y zu $n-1$ bilden, wenn man sodann weiter beachtet, dass von den $2n$ Stellen eines jeden der m Züge, welche die magische Tafel enthält, diejenigen m Stellen im ersten Quadranten AJ liegen, deren Abszissen und Ordinaten $< \frac{1}{2}(n-1)$ sind, ferner diejenigen im zweiten Quadranten BJ, deren Abszissen $> \frac{1}{2}(n-1)$ und deren Ordinaten $< \frac{1}{2}n$ sind, ferner diejenigen im dritten Quadranten CJ, deren Abszissen $< \frac{1}{2}(n-1)$ und deren Ordinaten $> \frac{1}{2}(n-1)$ sind, und endlich diejenigen im vierten Quadranten DJ, deren Abszissen und Ordinaten $> \frac{1}{2}(n-1)$ sind; so ist es leicht, die zu irgend einem Zuge gehörigen Kombinationen durch Substitution der Ergänzungen derjenigen ihrer Abszissen oder Ordinaten, welche kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}(n-1)$ sind, in einen anderen Zug zu verwandeln, dessen Kombinationen sofort die Zahlen darstellen, welche einem ganzen oder einem gehälfteten oder einem geviertheilten Zuge angehören. Zur leichteren Übersicht werden wir im Nachstehenden die zu $n-1$ zu ergänzenden Zahlen unterstreichen: diess giebt

für die aus A gezählten xy
„ „ „ B „ $\underline{x}y$
„ „ „ C „ $x\underline{y}$
„ „ „ D „ $\underline{xy}$

Bezeichnet man ferner irgend eine Zahl, welche $<\frac{1}{2}(n-1)$ ist, mit k und eine Zahl, welche $>\frac{1}{2}(n-1)$ ist, mit g; so liegen

im ersten	Quadranten	AJ	die Zahlen	kk
„ zweiten	„	BJ	„ „	gk
„ dritten	„	CJ	„ „	kg
„ vierten	„	DJ	„ „	gg

Sollen beispielsweise die in dem zweiten Quadranten liegenden Zahlen eines Zuges aus C gezählt werden; so hat man für diesen Zug $g\underline{k}$. So erfordert in dem letzten Beispiele die Drillingsformel $a + db + \frac{d}{c}$, dass in einem ganzen, aus A zu zählenden Zuge die Koordinaten ungeändert bleiben, dass in einem gehälfteten Zuge in allen aus D zu zählenden Kombinationen, deren Abszissen $<\frac{1}{2}(n-1)$ sind, die Abszissen und Ordinaten, in allen übrigen aus B zu zählenden Kombinationen aber die Abszissen zu $n-1$ ergänzt werden und dass in einem gehälfteten Zuge in allen aus D zu zählenden Kombinationen, deren Ordinaten $<\frac{1}{2}(n-1)$ sind, die Abszissen und Ordinaten und in allen übrigen, aus C zu zählenden Kombinationen die Ordinaten zu $n-1$ ergänzt werden. Hiernach trift für den ersten Zug keine Änderung der Kombinationen xy ein, für den zweiten Zug aber erhält man $\underline{ky}$ und $\underline{g}y$, für den dritten $\underline{xk}$ und $x\underline{g}$. Für einen geviertheilten Zug, z. B. für den Zug $\frac{ac}{db}$, würde man, da der erste Quadrant kk aus A, der zweite gk aus C, der dritte kg aus D und der vierte gg aus B gezählt werden soll, die Substitutionen kk, $g\underline{k}$, $\underline{kg}$, $\underline{g}g$ zu machen haben.

Indem wir die eben zitirte Drillingsformel auf das zuletzt behandelte Beispiel der magischen Tafel für $n = 6$ anwenden und die ersten, zweiten, dritten Horizontalreihen aller Quadranten zum ersten, zweiten, dritten Zuge des Drillings annehmen, sind die in der Tafel unterstrichenen Zahlen zu 5 zu ergänzen. Diess giebt die Tafel

01	32	45	51	22	15
12	50	21	43	05	34
30	14	53	20	44	03
04	33	40	54	23	10
13	55	24	42	00	31
25	41	02	35	11	52

Setzt man jede dieser Kombinationen an den geometrischen Ort, welcher durch die korrespondirende Kombination der magischen Tafel angezeigt wird, also die Zahl 01 der ersten Reihe an den Ort 01, die Zahl 12 der zweiten Reihe an den Ort 42, die Zahl 30 der dritten Reihe an den Ort 35; so erhält man das magische Quadrat

55	10	35	25	40	00
01	44	34	21	14	51
53	43	22	32	12	03
02	42	23	33	13	52
04	11	31	24	41	54
50	15	20	30	45	05

worin jede Kombination xy die Zahl $x + 6y$ oder auch die Zahl $1 + x + 6y$ vertritt.

21. Ist, allgemein, $n = 2m$ eine gerade Zahl; so wählen wir, wie in der vorstehenden Nummer, aus jedem der Zahlenpaare 0, $(n-1)$; 1, $(n-2)$; 2, $(n-3)$ etc. eine Zahl; diese m Zahlen, in ganz beliebiger Reihenfolge aufgestellt, mögen durch $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}$ vertreten sein. Die übrigen der n Zahlen 0, 1, 2, ... $(n-1)$, in beliebiger Reihenfolge aufgestellt, seien $b_0, b_1, \ldots b_{m-1}$. Wir nehmen die ersteren Zahlen zu den Abszissen von m Reihen von Kombinationen, indem wir in jeder Reihe dieselbe Folge der Abszissen a_0, a_1, ... beobachten, wobei es gleichgültig ist, ob die erste Abszisse ihre Stelle wechselt oder nicht. Diesen Abszissen fügen wir in jeder Reihe die Ordinaten b_0, b_1, ... in derselben Folge, jedoch so hinzu, dass die erste Ordinate in jeder

folgenden Reihe neben eine andere Abszisse gesetzt wird. Diese Tafel von m^2 Kombinationen betrachten wir als den ersten Quadranten einer magischen Tafel von n^2 Kombinationen, welche wir nach vorstehender Nummer in der Weise ergänzen, dass wir in den horizontalen Reihen die Ordinaten beibehalten und die Abszissen zu $n-1$ ergänzen, während wir in den vertikalen Reihen die Abszissen beibehalten und die Ordinaten zu $n-1$ ergänzen. Wäre z. B. $n=8$; so könnte man aus den vier Zahlenpaaren 0, 7; 1, 6; 2, 5; 3, 4 die vier Abszissen 0, 6, 3, 5 und die vier Ordinaten 1, 4, 2, 7 wählen, also folgende magische Tafel bilden

$$\begin{array}{cccc|cccc}
01 & \underline{6}4 & 32 & \underline{5}7 & 7\underline{1} & \underline{14} & 4\underline{2} & \underline{27} \\
07 & \underline{6}1 & 34 & \underline{5}2 & 7\underline{7} & \underline{11} & 4\underline{4} & \underline{22} \\
51 & \underline{0}4 & 62 & \underline{3}7 & 2\underline{1} & \underline{74} & 1\underline{2} & \underline{47} \\
67 & \underline{3}1 & 54 & \underline{0}2 & 1\underline{7} & \underline{41} & 2\underline{4} & \underline{72} \\
\hline
\underline{06} & 6\underline{3} & \underline{35} & 5\underline{0} & \underline{7}6 & 13 & \underline{4}5 & 20 \\
\underline{00} & 6\underline{6} & \underline{33} & 5\underline{5} & \underline{7}0 & 16 & \underline{4}3 & 25 \\
\underline{56} & 0\underline{3} & \underline{65} & 3\underline{0} & \underline{2}6 & 73 & \underline{1}5 & 40 \\
\underline{60} & 3\underline{6} & \underline{53} & 0\underline{5} & \underline{1}0 & 46 & \underline{2}3 & 75
\end{array}$$

Da das magische Quadrat vier Züge enthält; so kann dasselbe entweder wie ein Komplex von zwei Zwillingen oder wie ein Vierling behandelt werden. Nehmen wir dasselbe einmal als einen Vierling nach der Formel

$$\frac{ac}{db}+\frac{db}{ac}+\frac{ca}{bd}+\frac{bd}{ca}$$

Um die in der magischen Tafel vorzunehmenden Substitutionen auszuführen, übersetzen wir diese Vierlingsformel mit Hülfe der in Nr. 20 erläuterten Grössen k und g und der Unterstreichungen, welche die Ergänzungen zu $n-1$ andeuten, in folgende Formel

$$\frac{kk\;g\underline{k}}{\underline{kg}\;\underline{g}g}+\frac{\underline{kk}\;\underline{g}k}{kg\;g\underline{g}}+\frac{k\underline{k}\;gk}{\underline{k}g\;\underline{gg}}+\frac{\underline{k}k\;\underline{gk}}{k\underline{g}\;gg}$$

Die hiernach bewirkten Unterstreichungen sind in der vorstehenden magischen Tafel bereits vorgenommen, indem wir die ersten Horizontalreihen in allen Quadranten als ersten Zug, die zweiten als zweiten, die dritten als dritten und die vierten als vierten Zug angenommen haben. Das Resultat der Substitutionen ist das nachstehende magische Quadrat, worin jede Kombination xy den Werth $x + 8y$ oder auch $1 + x + 8y$ hat. Die Richtigkeit dieses Quadrates erkennt man sofort daraus, dass die Abszissen und die Ordinaten in jeder horizontalen und vertikalen Reihe die Summe $4 . 7 = 28$ bilden.

77	60	20	37	40	57	17	00
01	66	26	41	36	51	11	76
72	15	55	32	45	22	62	05
04	13	53	44	33	24	64	73
74	63	23	34	43	54	14	03
02	65	25	42	35	52	12	75
71	16	56	31	46	21	61	06
07	10	50	47	30	27	67	70

Wenn man in der magischen Tafel die Abszissen in der natürlichen Reihenfolge aufstellt und in jeder Reihe mit 0 beginnt, und wenn man auch die Ordinaten in der natürlichen oder verkehrten Reihenfolge aufstellt und ihr Anfangsglied in jeder Reihe um eine Stelle weiterrückt, ergiebt sich ein vollkommenes Quadrat nach nachstehendem Schema

00	11	22	33	70	61	52	43
03	10	21	32	73	60	51	42
02	13	20	31	72	63	50	41
01	12	23	30	71	62	53	40
07	16	25	34	77	66	55	44
04	17	26	35	74	67	56	45
05	14	27	36	75	64	57	46
06	15	24	37	76	62	54	47

Die einfachste Verwandlung dieser magischen Tafel für $n = 8$ in ein magisches Quadrat geschieht dadurch, dass man die vier Züge als zwei Zwillinge nach der Formel $a + d$ behandelt, was, da diese Formel gleichbedeutend mit $xy + \underline{xy}$ ist, durch die Vertauschung der in der Tafel unterstrichenen Zahlen mit ihren Ergänzungen zu 7 bewirkt werden kann.

22. Die in Klügel's Wörterbuche, S. 21 bis 25, und in Hoffmann und Natani's Wörterbuche, S. 12 bis 15 vorgetragenen Konstruktionen der magischen Quadrate mit gerader Seitenzahl, welche dem zweiten Theile der Dissertation von Mollweide entlehnt sind und sich auf die Methoden von Moschopulos stützen, sind Singularitäten der vorstehenden allgemeineren Regel; sie enthalten kein Merkmal für vollkommene Quadrate, können also nur zur Konstruktion unvollkommener Quadrate gebraucht werden.

23. In Nr. 9 ist auf die zusammengesetzten Quadrate aufmerksam gemacht, welche sich darstellen lassen, wenn die ungerade Zahl n aus Faktoren besteht. Solche Zusammensetzungen kommen auch für gerade Werthe von n in Betracht: da es jedoch für $n = 2$ keine magische Anordnung giebt; so bedarf die Absonderung des Faktors 2 einer besonderen Erläuterung. Dieselbe besteht darin, dass, wenn für irgend eine Stellenzahl m die Form der magischen Tafel bekannt ist, sie nach dem in Nr. 21 beschriebenen Verfahren durch Ergänzung der Abszissen, resp. Ordinaten zu $2m - 1$ sofort zu einer Tafel für $n = 2m$ erweitert werden kann. Ist also $n = 2^r m$ das Produkt einer ungeraden Zahl m in eine Potenz von 2; so kann man aus der Tafel für die Seitenzahl m sukzessiv magische Quadrate für $2m$, $4m$, ... $2^r m$ bilden, welche sich von den in Nr. 21 dargestellten Formen wie zusammengesetzte Formen von einfachen Formen unterscheiden. Selbstredend kann man nach der einfachen Regel auch sofort für die Seitenzahl $2^\alpha m$ ein Quadrat bilden, um dasselbe sukzessiv zu verdoppeln, zu vervierfachen und schliesslich für die Seitenzahl $2^r m$ zu erweitern.

Quadrat mit magischen Einfassungen.

24. Ein magisches Quadrat von der Seitenzahl n schliesst, wenn n ungerade ist, alle Quadrate von den Seitenzahlen $1, 3, 5, \ldots n$, und wenn n gerade ist, alle Quadrate von den Seitenzahlen $2, 4, 6, \ldots n$ ein. Wenn jedes dieser eingeschlossenen Quadrate magisch ist, heisst das Gesammtquadrat ein Quadrat mit magischen Einfassungen. Offenbar bildet sich ein solches Quadrat von innen nach aussen, indem um ein fertiges magisches Quadrat eine Einfassung gelegt wird, deren vier Seiten gleiche Summen zeigen und in welcher je zwei einander diametral gegenüberliegende Eckzahlen, sowie auch je zwei einander horizontal oder vertikal gegenüberliegende Zwischenzahlen eine konstante Summe bilden, wie nachstehende Beispiele für $n = 7$ und $n = 8$ zeigen.

4	49	48	47	8	9	10
5	15	37	36	18	19	45
6	16	22	29	24	34	44
43	33	27	25	23	17	7
39	30	26	21	28	20	11
38	31	13	14	32	35	12
40	1	2	3	42	41	46

1	63	62	4	5	59	58	8
56	15	49	48	44	19	20	9
55	47	25	28	39	38	18	10
11	22	40	37	26	27	43	54
53	42	34	35	32	29	23	12
13	24	31	30	33	36	41	52
14	45	16	17	21	46	50	51
57	2	3	61	60	6	7	64

Für ein ungerades n kann die Konstruktionsregel nicht einfacher, als die von französischen Mathematikern herstammende Regel sein, welche in Klügel's Wörterbuche auf S. 30 mitgetheilt ist, für ein gerades n kann man jedoch einfachere Regeln aufstellen. Zu dem Ende entwickeln wir folgenden allgemeinen Satz.

25. In jeder Einfassung unterscheiden wir die Eckzahlen von den Zwischenzahlen. Eine Einfassung von n Feldern in jeder Seite besteht aus $4(n-1)$ Zahlen, nämlich aus vier Eckzahlen und $4(n-2)$ Zwischenzahlen. Demzufolge stehen, wenn man die Einfassungen eines magischen Quadrates von der Seitenzahl n von aussen nach innen betrachtet, in der ersten Einfassung $4(n-1)$, in der zweiten

Einfassung $4(n-3)$, in der dritten $4(n-5)$ u. s. w. Zahlen. Man erkennt leicht, dass in einem regelmässigen Quadrate je zwei einander horizontal oder vertikal gegenüberliegende Zwischenzahlen, sowie je zwei einander diagonal gegenüberliegende Eckzahlen die Summe n^2+1 bilden müssen. In der ersten Einfassung muss ausserdem jede Seitensumme gleich $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ sein. Da sich die $4(n-1)$ Zahlen dieser Einfassung paarweise gegenüberstehen, und da $2(n-1)$ Zahlen den horizontalen und $2(n-1)$ Zahlen den vertikalen Seiten angehören; so seien, indem man aus jedem Paare die kleinere Zahl hervorhebt, $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ die $n-1$ kleineren Zahlen aus den vertikalen Seiten AC und BD (Fig. 10) und $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ die $n-1$ kleineren Zahlen aus den horizontalen Seiten AB und CD. Die $n-1$ grösseren Zahlen in den vertikalen und in den horizontalen Seiten bilden die Ergänzungen dieser Zahlen zu n^2+1. Von diesen Zahlen sei zur Bildung der fraglichen Einfassung eine Zahl a_1 der ersteren Reihe in das Eckfeld A und eine Zahl b_{n-1} der letzteren Reihe in das Eckfeld B gesetzt, von den übrigen seien keine zwei einander gegenüber gestellt, von je zwei horizontal oder vertikal gegenüberliegenden Zwischenfeldern sei vielmehr immer nur eins besetzt und die beiden Eckfelder C und D seien leer gelassen. Denkt man sich alle Zahlen, welche in eine Seite treten, zusammengeschoben (bei der Einschreibung können sie in jeder Seite mit beliebigen Zwischenräumen vertheilt werden); so füllen die schraffirten Theile der Einfassung bei A_1 und D_1, sowie bei B_1 und C_1 zusammen $(n-1)$ Felder aus.

Ist nun n ungerade $= 2m+1$; so sind in den schraffirten Theil

bei A_1	m	Zahlen	$a_1, a_2, \ldots a_m$
„ D_1	m	„	$a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_{2m}$
„ C_1	m	„	$b_1, b_2, \ldots b_m$
„ B_1	m	„	$b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots b_{2m}$

zu setzen. Wählt man diese Zahlen so, dass die Differenz der Summe aller in der oberen Horizontalreihe stehenden

$m+1$ Zahlen und aller in der unteren Horizontalreihe stehenden m Zahlen gleich $\frac{1}{2}(n^2+1)$ und dass ebenso die Differenz der Summe aller in der hinteren Vertikalreihe stehenden $m+1$ Zahlen und aller in der vorderen Vertikalreihe stehenden m Zahlen gleich $\frac{1}{2}(n^2+1)$ ist, dass man also

$$a_1 + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots b_{2m} = \tfrac{1}{2}(n^2+1) + b_1 + b_2 + \dots b_m$$

$$b_{2m} + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots a_{2m} = \tfrac{1}{2}(n^2+1) + a_1 + a_2 + \dots a_m$$

hat; so ist die Aufgabe erfüllt.

Ist n gerade $= 2m$; so sind in den schraffirten Theil

bei A_1 m Zahlen $a_1, a_2, \dots a_m$
„ D_1 $m-1$ „ $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots a_{2m-1}$
„ C_1 m „ $b_1, b_2, \dots b_m$
„ B_1 $m-1$ „ $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots b_{2m-1}$

zu setzen und es ist danach zu sehen, dass die Differenzen der Summe der in den horizontalen oder vertikalen Seiten stehenden m Zahlen gleich Null werden, dass man also hat

$$a_1 + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots b_{2m-1} = b_1 + b_2 + \dots b_m$$

$$b_{2m-1} + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots a_{2m-1} = a_1 + a_2 + \dots a_m$$

Die Konstruktion der magischen Quadrate durch quadratische Einfassungen kann auf Regeln gebracht werden, welche diesen Quadraten eine gewisse Regelmässigkeit verleihen. In dieser Gestalt erfüllen sie das Gesetz der symmetrischen Figuren, gehören aber dessenungeachtet nicht zu den vollkommenen Quadraten. Unter den unvollkommenen Quadraten bilden sie eine ganz besondere Art, welche in den nach Nr. 19 ff. hergestellten nicht enthalten ist.

26. Der vorstehende allgemeine Satz führt unter Anderem zu folgenden einfachen Konstruktionsregeln. Um die n^2 Zahlen 1, 2, ... n^2 zu einem Quadrate mit magischen Einfassungen zu formiren, bestimmen wir die $2(n-1)$ Zahlen 1, 2, ... $2(n-1)$ und deren Ergänzungen zu n^2+1 für die äusserste Einfassung. In die zweite Einfassung treten dann ebenso die folgenden $2(n-3)$ Zahlen mit ihren Ergänzungen, in die dritte Einfassung die darauf folgenden $2(n-5)$ Zahlen mit ihren Ergänzungen u. s. f.

Ist n eine ungerade Zahl $= 2m+1$; so stellt man in die erste Ecke A die Zahl $m+1$ und in die zweite Ecke B die Zahl $3m+1$, darauf setzt man in Zwischenstellen der dritten Seite CD die Zahlen 1 bis m, in die vierte Seite AC die Zahlen $m+2$ bis $2m$, in die erste Seite AB die Zahlen $2m+2$ bis $3m$ und in die zweite Seite BD die Zahlen $3m+2$ bis $4m$ und ausserdem die Zahl $2m+1$. Schliesslich kommen in die noch leeren Stellen die Ergänzungen der ihnen gegenüberstehenden Zahlen. Das Schema der Einfassung ist also folgendes, worin wir die Ergänzung einer Zahl a zu n^2+1 durch a' und die Kontinuität einer ununterbrochen fortlaufenden Zahlenreihe durch Punktirung angedeutet haben.

$$\begin{array}{lcr}
m+1 & 1'\ 2' \ldots m'\ 2m+2 \ldots 3m & 3m+1 \\
m+2 & & (m+2)' \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
2m & & (2m)' \\
(2m+1)' & & 2m+1 \\
(3m+2)' & & 3m+2 \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
(4m)' & & 4m \\
(3m+1)' & 1\ 2 \ldots m\ (2m+2)' \ldots (3m)' & (m+1)'
\end{array}$$

Am kürzesten lässt sich diese Regel so darstellen, dass vier aufeinander folgende Seiten der Einfassung von den Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ die nachfolgend bezeichneten, wovon die Eckzahlen unterstrichen sind, aufnehmen

$$\begin{array}{ll}
DC: & 1, 2 \ldots m \\
CA: & \underline{m+1} \ldots 2m \\
AB: & \underline{m+1},\ 2m+2 \ldots \underline{3m+1} \\
BD: & \underline{3m+1} \ldots 4m, \quad 2m+1
\end{array}$$

Die zweite Einfassung wird, wenn man $n_1 = n-2$ und $m_1 = m-1$ setzt, aus den folgenden $2(n_1-1)$ Zahlen, die dritte Einfassung, wenn man $n_2 = n-4$ und $m_2 = m-2$

setzt, aus den alsdann folgenden $2(n_2 - 1)$ Zahlen u. s. w. nach derselben Regel gebildet, indem man statt der in der ersten Einfassung stehenden Zahlen 1, 2, 3, ... jetzt die erste, zweite, dritte u. s. w. Zahl der neuen Reihe nimmt. Die Ergänzungen geschehen immer zu $n^2 + 1$. Diese Regel stimmt mit der in Klügel's Wörterbuche, S. 30, mitgetheilten überein.

27. Ist $n = 2m$ gerade und das Doppelte einer geraden Zahl m; so setzen wir in die erste Ecke A die Zahl m, in die zweite Ecke B die Zahl $m + 1$, darauf in die zweite Seite BD die Zahl $n + 1$ und in die vierte Seite AC die Zahl $n + 2$, endlich bilden wir aus den Zahlen 1 bis n die m Paare $1, n$; $2, n - 1$; $3, n - 2$; $4, n - 3$ u. s. w. von gleicher Summe $n + 1$. Unter diesen Paaren befindet sich auch als mittelstes das Paar der beiden Eckzahlen $m, m + 1$. Von diesen m Paaren stellen wir eine beliebige Hälfte, worunter jedoch das Paar $m, m + 1$ sich befindet, in die erste Seite AB und die andere Hälfte in die dritte Seite CD. Endlich bilden wir aus den Zahlen $n + 3$ bis $2n - 2$ die $m - 2$ Paare $n + 3, 2n - 2$; $n + 4, 2n - 3$; $n + 5, 2n - 4$ u. s. w. von gleicher Summe $3n + 1$ und stellen die Hälfte derselben in die zweite Seite BD, wo sich bereits das Zahlenpaar $m + 1, n + 1$ befindet, und die andere Hälfte in die vierte Seite AC, wo sich bereits das Zahlenpaar $m, n + 2$ befindet.

Ist $n = 2m$ gerade, aber das Doppelte einer ungeraden Zahl m; so beachten wir, dass sich aus zehn aufeinander folgenden Zahlen $a + 1, a + 2, \ldots a + 10$ vier Drillinge bilden lassen, wovon zwei und zwei gleiche Summen bilden und welche so zusammenhängen, dass zwei Zahlen des einen Drillings zugleich zwei anderen Drillingen angehören, während der vierte Drilling mit den anderen keine Zahl gemein hat. Indem wir die gemeinsamen Zahlen unterstreichen und die Drillinge von gleicher Summe untereinander setzen, sind diese vier Drillinge

$$\underline{a+1},\ a+5,\ \underline{a+6} \qquad \underline{a+1},\ a+8,\ a+10$$
$$a+2,\ a+3,\ a+7 \qquad a+4,\ \underline{a+6},\ a+9$$

Offenbar können je zwei gleichwerthige dieser vier Drillinge in zwei entgegengesetzte Seiten einer magischen Einfassung gesetzt werden, indem die beiden gemeinschaftlichen Zahlen derselben die Eckzahlen der einen Seite werden. Dieses Fragment einer Einfassung ist, ohne Rücksicht auf die genaue geometrische Gegenüberstellung,

$$\begin{array}{ccc} a+1 & a+5 & a+6 \\ a+8 & & a+4 \\ a+10 & & a+9 \\ & a+2,\ a+3,\ a+7 & \end{array}$$

Dieses Fragment lässt sich durch Hinzufügung von gleich viel Zahlenpaaren in allen Seiten, wovon zwei und zwei gleiche Summen bilden, zu einer beliebig grossen Einfassung erweitern. Um also die Zahlen $1, 2, \ldots 2(n-1)$ auf die vier Seiten einer Einfassung zu vertheilen, schneiden wir entweder vom vorderen Ende, oder vom hinteren Ende oder genau aus der Mitte dieser Zahlenreihe zehn Zahlen ab, um daraus die vorstehenden vier Drillinge zu bilden und in angegebener Weise in der Einfassung aufzustellen. Die übrig bleibenden $2(n-1) - 10 = 2(n-6) = 4(m-3)$ Zahlen lassen sich, weil ihre Anzahl ein Vielfaches von 8 ist, zu einer durch 4 theilbaren Menge von Paaren mit gleicher Summe zusammenstellen. Indem man von diesen Paaren in jede der vier Seiten gleich viel setzt, ist die Einfassung vollendet. Schneidet man jene zehn Zahlen vom vorderen Ende der fraglichen Zahlenreihe ab; so ist die Anlage der Einfassung

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 6 \\ 8 & & 4 \\ 10 & & 9 \\ & 2\ \ 3\ \ 7 & \end{array}$$

und die übrigen Zahlen bilden immer je vier Paare wie $11, 2n-2$; $12, 2n-3$; $13, 2n-4$; $14, 2n-5$ u. s. w., welche über die vier Seiten gleichmässig vertheilt werden.

Für die zweite Einfassung eines Quadrates ist $n_1 = n-2$, für die dritte $n_2 = n-4$ u. s. w. Abwechselnd sind aber die Grössen n, n_1, n_2, ... das Doppelte einer geraden und einer

ungeraden Zahl; die aufeinander folgenden Einfassungen gehorchen also abwechselnd der für gerade Werthe von n gegebenen ersten und zweiten Regel. Nachdem man auf die Einfassung mit der Seitenzahl 4 angekommen ist, schliesst die Operation, da diese Einfassung und ihr vierstelliger Kern nicht mehr den Bedingungen eines Quadrates mit magischen Einfassungen entsprechen kann, sondern nach Nr. 12 zu bilden ist.

Um hiernach beispielsweise für $n = 10$ das magische Quadrat aus den 100 Zahlen 1, 2, ... 100 zu bilden, nehmen wir in die erste Einfassung für $n = 10$ die 18 Zahlen 1, 2, ... 18, in die zweite Einfassung für $n_1 = 8$ die 14 Zahlen 19, 20, ... 32, in die dritte Einfassung für $n_2 = 6$ die 10 Zahlen 33, 34, ... 42 und schliessen die Operation mit dem 16-stelligen Quadrate der Zahlen 43, 44, ... 58. Diess giebt, da $n^2 + 1 = 101$ ist, das Quadrat

1	99	98	94	5	11	18	85	88	6
8	22	82	75	81	76	21	24	23	93
10	74	33	67	66	62	37	38	27	91
97	28	65	43	57	56	46	36	73	4
92	72	60	54	48	49	51	41	29	9
89	69	40	50	52	53	47	61	32	12
84	30	42	55	45	44	58	59	71	17
15	31	63	34	35	39	64	68	70	86
14	78	19	26	20	25	80	77	79	87
95	2	3	7	96	90	83	16	13	100

28. Die Regeln der vorstehenden Nummer lassen sich in mannichfacher Weise variiren. Zu dem Ende verallgemeinern wir dieselben in folgender Weise.

Ist $n = 2m$ das Doppelte einer geraden Zahl m; so schneide man nach Belieben von dem vorderen oder hinteren Ende der Zahlenreihe 1 bis $2n - 2$ zunächst n Zahlen, also entweder die Zahlen 1 bis n oder die Zahlen $n - 1$ bis $2n - 2$ ab und fasse dieselben zu je zwei und zwei zu m Paaren von gleicher Summe zusammen. Alsdann nehme man von den übrig gebliebenen $n - 2$ Zahlen c_1, c_2, ... c_{n-2} die

niedrigste c_1 und die höchste c_{n-2} als erste Glieder zweier Paare c_1, d_x und c_{n-2}, d_y von gleicher Summe $c_1 + d_x = c_{n-2} + d_y$, deren zweite Glieder d_x und d_y irgendwo in der Reihe der zuerst abgeschnittenen Zahlen stehen. Zwischen c_1 und c_{n-2} bleiben dann $n - 4 = 2(m - 2)$ Zahlen stehen, welche zu $m - 2$ Paaren von gleicher Summe zusammengefasst werden. Nach dieser Vorbereitung stellen wir die Zahl d_x in die erste Ecke A, die Zahl d_y in die zweite Ecke B, die Hälfte der ersten m Paare, worin sich übrigens die beiden Zahlen d_x und d_y befinden müssen, in die erste Seite AB, die andere Hälfte in die dritte Seite CD, endlich die eine Hälfte der letzten $m - 2$ Paare in die zweite Seite BD und die andere Hälfte in die vierte Seite AC.

So kann man z. B. für $n = 8$ von den 14 Zahlen 1 bis 14 die letzten 8 Zahlen 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 abschneiden, um daraus die 4 Paare 7, 14; 8, 13; 9, 12; 10, 11 zu bilden. Nimmt man dann zu der niedrigsten und höchsten Zahl der übrig gebliebenen Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, also zu 1 und 6 als zweite Glieder resp. die Zahlen 14 und 9, indem man daraus die Paare 1, 14 und 6, 9 bildet; so bleiben die Zahlen 2, 3, 4, 5 übrig, welche zwei Paare 2, 5; 3, 4 geben. Hiernach werden 9 und 14 die beiden Eckzahlen A und B und es kommen überhaupt in die erste Seite AB die Zahlen 9, 12, 7, 14, in die dritte Seite CD die Zahlen 8, 13, 10, 11, in die zweite Seite BD die Zahlen 14, 1, 2, 5 und in die vierte Seite AC die Zahlen 9, 6, 3, 4.

Der vorstehende Satz lässt sich noch weiter verallgemeinern. Man kann nämlich die ersten n Zahlen an einer beliebigen Stelle aus der Reihe 1 bis $2n - 2$ herausschneiden, wenn man nur diese Stelle so wählt, dass unter Hinzunahme der an jene n Zahlen vorn oder hinten unmittelbar anstossenden beiden Zahlen, vor und hinter diesen $n + 2$ Zahlen je eine durch 4 theilbare Anzahl von Zahlen stehen bleibt. Man braucht zu dem Ende zu der ersten dieser $n + 2$ Zahlen nur eine Zahl von der Form $4p + 1$ zu wählen. Indem man dann zu den an die ersten n Zahlen anstossenden beiden Zahlen zwei Glieder aus der herausgeschnittenen Reihe von

n Zahlen nimmt, welche mit ihnen Paare von gleicher Summe bilden und die Eckzahlen A und B liefern, kann man die vorn übrig gebliebenen und auch die hinten übrig gebliebenen Zahlen für sich zu Paaren von gleichen Summen ordnen und sowohl die Hälfte der einen, als auch die Hälfte der anderen in die gegenüberliegenden vertikalen Seiten setzen.

Ist $n = 2m$ das Doppelte einer ungeraden Zahl m, und sind a und b zwei beliebige Zahlen von der Form $4p$ (worin auch $p = 0$ sein kann); so kann man aus der Zahlenreihe 1 bis $2n - 2$ zunächst 10 Zahlen herausheben, welche folgende 4 Drillinge mit den Eckzahlen $a+1$ und $a+b+6$ bilden

$a+1$		$a+b+5$		$a+b+6$
$a+b+8$				$a+b+4$
$a+2b+10$				$a+b+9$
	$a+2$	$a+b+3$	$a+b+7$	

Alle übrig bleibenden Zahlen lassen sich nun zu Paaren ordnen, welche mehrere Komplexe von gleichen Summen bilden. Jeder dieser Komplexe enthält eine gerade Anzahl von Paaren, lässt sich also über die vier Seiten des Quadrates so vertheilen, dass in zwei gegenüberstehenden Seiten gleiche Summen erscheinen.

Die in Klügel's Wörterbuche auf S. 32 ff. mitgetheilten Regeln sind Spezialitäten der letzteren allgemeinen Sätze.

II. Das magische Polygon.

29. Wenn sich die Zahl n in zwei gerade oder in zwei ungerade Faktoren a, b zerlegen lässt; so können die n Zahlen 1, 2, 3, ... n in ein Rechteck von der Länge a und der Höhe b dergestalt geordnet werden, dass die horizontalen Reihen die konstante Summe $\frac{1}{2}a(n+1)$ und die vertikalen Reihen die konstante Summe $\frac{1}{2}b(n+1)$ bilden. So ergeben z. B. die 32 Zahlen 1, 2, ... 32 das magische Rechteck mit den Summen 66 und 132

1	10	11	29	28	19	18	16
9	2	30	12	20	27	7	25
24	31	3	21	13	6	26	8
32	23	22	4	5	14	15	17

30. Das magische Quadrat erweitert sich zu einem magischen Polygone durch folgende Betrachtung. Im Mittelpunkte J der Figur $A'B'C'D'E'$ von r Seiten (Fig. 11) sei eine Zahl gestellt, ferner seien im Umfange dieser Figur in jedem Eckpunkte A', B', C', D', E' und in dem Mittelpunkte jeder Seite eine Zahl, überhaupt in jeder Seite drei Zahlen aufgestellt. In dem grösseren Polygone $ABCDE$, dessen Seite doppelt so lang ist als die des ersten, trage jede Seite 5 Zahlen und jedes fernere, das frühere umschliessende Polygon, dessen Seite um die Seitenlänge des ersten Polygons wächst, erhalte in seiner Seite 2 Zahlen mehr. Sind m solche Polygone vorhanden; so enthält die Seite des äussersten Polygons die ungerade Menge von $n = 2m + 1$ Zahlen und die von diesem eingeschlossene Fläche im Ganzen $a = rm(m+1) + 1 = \frac{1}{4}r(n^2 - 1) + 1$ Zahlen. Beginnt man nach Fig. 12 mit einem Polygone $A'B'C'D'E'$, welches nur in jeder Ecke eine Zahl trägt; so fällt der Mittelpunkt als Zahlstelle fort, die Seite des äussersten Polygons hat die gerade Menge von $n = 2m$ und die ganze Polygonfläche $a = rm^2 = \frac{1}{4}rn^2$ Zahlen.

Hieraus folgt, dass eine Zahlenmenge a, welche ein Vielfaches eines Quadrates ist, sich nach Fig. 12 als ein Polygon mit gerader Seitenzahl gruppiren lässt und dass eine Zahlenmenge a, welche in die Form $rm(m+1)+1$ gebracht werden kann, sich nach Fig. 11 als ein Polygon mit ungerader Seitenzahl ordnen lässt.

Die a Zahlen $1, 2, 3, \ldots a$, welche eine r-seitige Polygonfläche füllen, lassen sich stets so aufstellen, dass jede Seite derselben polygonalen Einfassung dieselbe Summe bildet, mit alleiniger Ausnahme des innersten Kernes $A'B'C'D'E'$ eines Polygons mit gerader Seitenzahl (Fig. 12).

Beispielsweise können die 3 Zahlen 1, 2, 3 kein magisches Dreieck bilden, wohl aber bilden die 7 Zahlen

1, 2, ... 7 ein magisches Dreieck mit ungerader Stellenzahl und die 12 Zahlen 1, 2, ... 12, sowie die 27 Zahlen 1, 2, ... 27 ein magisches Dreick mit gerader Stellenzahl in folgender Weise

```
   1
 7 4 6
2  5  3
```

```
26  3  6  10  24  27
 18  20  9  11  21  2
  22 15 16 17  8  5
    4  7  12 13 23
       1  19  14
          25
```

```
      10
    1  5  6
  8  7  9  2
11  3  4  12
```

Nachstehendes ist ein magisches Fünfeck mit ungerader Stellenzahl aus den 31 Zahlen 1, 2, ... 31 und ein Fünfeck mit gerader Seitenzahl aus den 20 Zahlen 1, 2, ... 20

```
             1
         28     26
     10     15     11
  25    18     17     27
4    12    6     13      3
 29    19       21    22
   9     14  20  11   7
    24              31
      2  30  8  23  5
```

```
     16  4  12  17
  14                3
 1       7   9      10
18    15       11      19
    6      13      2
        5      8
           20
```

Ein magisches Sechseck mit ungerader Stellenzahl aus den 13 Zahlen 1, 2, ... 13 ist dieses

```
        8
    1       3
12             10
 5      7       9
 4              2
    11      13
        6
```

Ein magisches Polygon ist unvollkommen, wenn in allen Seiten einundderselben polygonalen Einfassung, nicht aber in den verschiedenen Radien und in anderen symmetrischen Linien dieselbe Summe erscheint: durch Erfüllung der letzteren Bedingung ergeben sich die den vollkommenen magischen Quadraten analogen regelmässigen Gruppirungen, wie z. B. das umstehende aus den Zahlen 1, 2, ... 31 gebildete Fünfeck, welches in der äusseren Einfassung die Seitensumme 68 und in der inneren die Seitensumme 45 hat, ausserdem aber in jedem durch eine Ecke gezogenen Eckradius die Summe 22 und in jedem durch eine Seitenmitte gezogenen Zwischenradius die Summe 34 darbietet.

Die Gesetze der magischen Polygone hängen von der Seitenzahl derselben und von der Anzahl der darin unterzubringenden Zahlen ab; wir beschränken uns auf die Mittheilung folgender Sätze.

31. Wenn die Anzahl der Seiten des Polygons eine ungerade Zahl $r = 2s + 1$ ist; so hann eine magische Einfassung, in welcher auf jeder Seite die beiden Ecken und ein Zwischenpunkt in der Mitte besetzt sind, auf verschiedene Weise gebildet werden. Wir betrachten die irgend einem Radius angehörige Ecke als die erste Ecke des Polygons, die rechts daran stossende Seite als die erste und die links daran stossende als die letzte Seite, nehmen die Zählung um das Polygon von der ersten Ecke oder Seite nach rechts als die positive Zählrichtung, in welcher wir in regelmässigen Sprüngen von der ersten Ecke oder Seite auf die zweite, dritte u. s. w. oder auf die dritte, fünfte u. s. w. oder, allgemein, auf die $(n + 1)$-ste, $(2n + 1)$-ste u. s. w. übergehen, um auf den getroffenen Ecken die Glieder einer steigenden oder fallenden Progression a, $a \pm d$, $a \pm 2d$, ... unterzubringen.

Setzt man in die Ecken die mit der Differenz 1 steigende Progression a, $a + 1$, $a + 2$, ..., indem man immer eine Ecke überspringt, in die Zwischenpunkte der unmittelbar aufeinander folgenden Seiten dagegen die mit der Differenz -1 fallende Progression b, $b - 1$, $b - 2$, ..., indem die

grösste Zahl der zweiten Progression links neben die kleinste Zahl der ersten trifft; so ergiebt sich folgende magische Einfassung, worin die obere Reihe die Eckzahlen und die untere die Zwischenzahlen enthält.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \ldots a+s-1 & & a+r-1 & & a+s & & a & & a+s+1 & & a+1 & & a+s+2 & & a+2\ldots \\ \ldots & b-r+2 & & b-r+1 & & b & & b-1 & & b-2 & & b-3 & & b-4 & \ldots \end{array}$$

Die konstante Seitensumme ist $2a + b + s$. So geben z. B. die beiden siebengliedrigen Progressionen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 die siebenseitige Einfassung mit der Seitensumme 19

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 3 & & 7 & & 4 & & 1 & & 5 & & 2 & & 6 & & 3 \\ & 9 & & 8 & & 14 & & 13 & & 12 & & 11 & & 10 & \end{array}$$

Setzt man statt der beiden Progressionen mit den Differenzen $+1$ und -1 zwei Progressionen mit den Differenzen $+d$ und $-d$; so wird die Seitensumme $2a + b + sd$.

32. Der vorstehende Satz reicht aus, um eine magische Polygonfläche von ungerader Seitenzahl r und beliebig vielen Einfassungen auszufüllen, insofern in der Seite jeder polygonalen Einfassung eine ungerade Menge von Zahlen stehen sollen. In diesem Falle bildet der Mittelpunkt der Polygonfläche das erste Polygon mit einer Zahl; das nächste r-seitige Polygon enthält $2r$, das folgende $4r$, das darauf folgende $6r$ Zahlen u. s. w. Bezeichnet man die Menge der in einem Radius stehenden Zahlen mit ϱ; so enthält die ganze Polygonfläche $1 + 2r + 4r + \ldots + 2(\varrho - 1)r = \varrho(\varrho - 1)r + 1 = p$ Zahlen und wir behaupten, dass sich die aufeinander folgenden Zahlen $1, 2, \ldots p$ zu einem solchen r-seitigen magischen Polygone mit ϱ Einfassungen, von welchen jede eine konstante Seitensumme bildet, gruppiren lassen. Denn zerlegt man diese p Zahlen in ϱ Gruppen, von welchen die erste eine, die zweite $2r$, die dritte $4r$, die vierte $6r$ u. s. w. aufeinander folgende Zahlen enthält; so lassen sich aus diesen Gruppen resp. die erste, zweite, dritte, vierte ... ϱ-te Einfassung bilden, indem man aus der zweiten, dritten, vierten ... Gruppe immer die ersten oder die letzten $2r$ Zahlen nach der Regel Nr. 31 auf die Ecken und

Mitten der betreffenden Einfassung vertheilt, aus den übrigen $0, 2r, 4r, \ldots$ Zahlen jener Gruppen aber resp. $0, r, 2r, \ldots$ Zahlenpaare von gleichem Summenwerthe bildet, um dieselben den betreffenden Einfassungen noch zuzutheilen.

Diese Gruppirung lässt sich in verschiedener, unter Anderem in folgender Weise ausführen. Wenn es sich um ϱ Einfassungen handelt; so ist, wenn $\varrho(\varrho - 1) = 2m$ gesetzt wird, die letzte Zahl der zu gruppirenden Zahlen $p = 2mr + 1$ und die mittelste Zahl $mr + 1 = q$. Diese mittelste Zahl wird als erste Einfassung oder Kern in den Mittelpunkt des Polygons gesetzt. Hierauf schneidet man links und rechts von dieser Mittelzahl je r Zahlen $q - r$, $q - r + 1, \ldots q - 1$ und $q + 1, q + 2, \ldots q + r$ ab und, indem man $q - r = a$, $q + r = b$ nimmt, besetzt man damit nach der Regel Nr. 31 die Ecken und Mitten der zweiten Einfassung. Alsdann schneidet man wiederum links und rechts je r Zahlen $q - 2r$, $q - 2r + 1, \ldots q - r - 1$ und $q + r + 1$, $q + r + 2, \ldots q + 2r$ ab und, indem man $q - 2r = a$, $q + 2r = b$ nimmt, besetzt man damit die Ecken und Mitten der dritten Einfassung. In dieser Weise fährt man fort, die Ecken und Mitten der Einfassungen mit zweimal r Zahlen zu besetzen, welche links und rechts von der Mittelzahl eine kontinuirliche Reihe bilden. Die hiernach an den beiden Enden der gegebenen Zahlenreihe übrig bleibenden Zahlen bilden ebenso viel Paare von der Summe $p + 1 = 2mr + 2$, als nöthig sind, um in der zweiten, vierten ... Einfassung die noch leeren Stellen paarweise auszufüllen.

Um z. B. aus den 101 Zahlen 1, 2, ... 101 ein magisches Fünfeck mit fünf Einfassungen zu bilden, kömmt als erste Einfassung in den Mittelpunkt die Mittelzahl 51. Die zunächst links und rechts liegenden Zahlen 46, 47, 48, 49, 50 und 52, 53, 54, 55, 56 bilden die zweite Einfassung. Die Zahlen 41, 42, 43, 44, 45 und 57, 58, 59, 60, 61 kommen in die Ecken und Mitten der dritten Einfassung, die Zahlen 36, 37, 38, 39, 40 und 62, 63, 64, 65, 66 in die Ecken und Mitten der vierten Einfassung, die Zahlen 31, 32, 33, 34, 35 und 67, 68, 69, 70, 71 in die Ecken und Mitten

der fünften Einfassung. Aus den übrig bleibenden 60 Zahlen 1, 2, ... 30 und 72, 73, ... 101 sind 30 Paare von der Summe $1 + 101 = 102$ zu bilden, wovon 5 Paare der dritten, 10 Paare der vierten und 15 Paare der fünften Einfassung zuzutheilen sind.

Es liegt auf der Hand, dass die konstante Seitensumme der Einfassungen von einer Einfassung zu der nächst folgenden um den gleichen Betrag zunimmt. Übrigens ist es nicht unbedingt nöthig, dass die nach Aushebung der Progressionen übrig bleibenden Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots p$ gegen den Mittelpunkt dieser Reihe, sondern nur dass sie gegen ihren eigenen Mittelpunkt eine symmetrische Gruppe bilden, so dass sie paarweise eine konstante Summe, wenn auch nicht die Summe $p + 1$ haben. Demnach kann man in vielen Fällen diejenigen Progressionen, welche die Differenz 1 haben, ununterbrochen von dem einen Ende der Reihe $1, 2, \ldots p$ abschneiden.

33. Zur Herstellung eines magischen Polygons, worin auch die Radien, welche nach den Ecken führen, konstante Summen enthalten, beachte man, dass, wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Anfangsglieder und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Endglieder der Reihen sind, welche in die Ecken der verschiedenen Einfassungen treten und man in einen Radius, welcher durch eine bestimmte Ecke geht, ebenso viel Anfangsglieder a, wie Endglieder x setzt, indem man die den Endgliedern entsprechenden Progressionen zwar immer in derselben Richtung, aber mit der Differenz $d = -1$ fallend um das Polygon laufen lässt, alle Eckradien dieselbe Summe erhalten werden. Das Nämliche gilt von den nach den Seitenmitten führenden Zwischenradien, welchen die Progressionen $b_1, \ldots y_1$, $b_2, \ldots y_2$, $b_3, \ldots y_3$ u. s. w. mit entgegengesetzten Differenzen angehören, indem man an der in Nr. 31 mit b markirten Stelle in den Einfassungen mit steigenden Progressionen das Anfangsglied und in den Einfassungen mit fallenden Progressionen das Endglied einsetzt. Diess liefert z. B. die nachstehende Gruppirung, worin die erste, dritte, fünfte, siebente Reihe die Eckzahlen, die zweite, vierte, sechste, achte Reihe

dagegen die Zwischenzahlen darstellen, während die Füllzahlen, welche die Paare von der Summe 102 bilden, sowie auch die dem Zentrum oder allen Ecken zugleich angehörige Zahl 51 ganz weggelassen sind.

47 50 48 46 49 47
53 52 56 55 54
42 45 43 41 44 42
58 57 61 60 59
39 36 38 40 37 39
65 66 62 63 64
34 31 33 35 32 34
70 71 67 68 69

In diesem magischen Fünfeck hat jeder Eckradius die Summe 162. Wenn jede Seite des Polygons eine ungerade Menge von Zahlen enthält, haben auch die nach den Seitenmitten führenden Zwischenradien des so konstruirten Polygons eine konstante Summe, welche hier den Werth 246 besitzt. Die konstante Seitensumme dieses Polygons ist mit den einzuschaltenden Paaren in den einzelnen Einfassungen 135, $140+102=242$, $145+2.102=349$, $150+3.102=456$, so dass diese Summe von einer Einfassung zur anderen um 107 wächst.

Die vorstehende Konstruktion ist nur anwendbar, wenn um das Zentrum des Polygons eine gerade Menge von Einfassungen liegen, also ϱ ungerade ist. Wenn ϱ gerade ist, also eine ungerade Menge von Einfassungen das Zentrum umgeben, dürfen nicht alle Gruppen, welche links und rechts von der mittelsten Zahl q aus der Zahlenreihe $1, 2, \ldots p$ geschnitten werden, Progressionen von der Differenz 1 sein. Wenn man für eine dieser Gruppen zwei Progressionen von r Zahlen mit der Differenz 2 annimmt, wenn man also links von q die r Zahlen $q-t-2r$, $q-t-2r+2$, $\ldots$ $q-t-2$ und rechts von q die r Zahlen $q+t+2$, $q+t+4$, $\ldots$ $q+t+2r$ abschneidet (deren Zwischenräume immer durch Zahlenpaare von der Summe $p+1$ besetzt sind); so hat man für die Ecken des Polygons über eine gerade Menge von

Progressionen mit der Differenz 1 und über eine Progression mit der Differenz 2 zu verfügen. Die letzere sei $a_1, \dots x_1$, zwei der ersteren seien $a_2, \dots x_2$ und $a_3, \dots x_3$. Setzt man in die erste Ecke die Anfangsglieder a_2, a_3 und das Endglied x_1, oder auch umgekehrt, so liefern diese drei Progressionen für jede Ecke eine konstante Summe von drei Gliedern. Indem man von den übrigen Progressionen zur Hälfte die Anfangsglieder und zur Hälfte die Endglieder auf dieselbe Ecke setzt, bilden auch je zwei aus diesen Progressionen stammenden Zahlen eine konstante Summe. Mit einer steigenden oder fallenden Progression a kombinirt sich selbstredend immer eine fallende oder steigende Progression b.

Um hiernach z. B. aus den 151 Zahlen 1, 2, ... 151 ein magisches Fünfeck mit 5 Einfassungen um das Zentrum, in welchem die Zahl 76 steht, herzustellen, kann man die Gruppen nach folgendem Plane bilden, worin S' die Summe der Eck- und Zwischenzahlen in jeder Seite, S aber die ganze Seitensumme mit Einschluss der einzuschaltenden Zahlenpaare von der Summe 152 bezeichnet.

Einfassung	a	b	d	S'	S
1	67	77	+ 2	223	223
2	65	91	− 1	215	367
3	60	96	− 1	210	514
4	55	101	− 1	205	661
5	46	102	+ 1	200	808

Die Eck- und Zwischenzahlen dieses magischen Fünfeckes sind diese:

69 75 71 67 73 69
79 77 85 83 81
64 61 63 65 62 64
90 91 87 88 89
59 56 58 60 57 59
95 96 92 93 94
54 51 53 55 52 54
100 101 97 98 99
47 50 48 46 49 47
103 102 106 105 104

Die Eckradien zeigen die konstante Summe 293 und die Zwischenradien die Summe 467.

34. Wenn das Polygon eine gerade Anzahl r von Seiten hat, ist das Bildungsgesetz ein wesentlich anderes. Wir gehen zunächst von der Voraussetzung aus, dass jede Polygonseite mit drei Zahlen besetzt werden soll, und fassen die Zahlen $1, 2, 3, \dots 2r+1$ ins Auge, indem wir die mittelste Zahl $r+1$ von der polygonalen Einfassung ausschliessen, um sie im Zentrum derselben aufzustellen. Aus den $2r$ Zahlen $1, 2, \dots r$ und $r+2, r+3, \dots 2r+1$ lässt sich ein magisches Polygon in verschiedener Weise bilden. Von allen zeichnet sich dasjenige durch Regelmässigkeit aus, in welchem sämmtliche Ecken von den geraden Zahlen $2, 4, 6, \dots 2r$ und alle Zwischenstellen von den ungeraden Zahlen $1, 3, \dots r-1$ und $r+3, r+5, \dots 2r+1$ eingenommen werden. Da alle $2r$ Zahlen ohne die Zahl $r+1$ die Summe $2r(r+1)$ und die r geraden Zahlen auf den Ecken die Summe $r(r+1)$ bilden, jede Eckzahl aber sowohl der links, als auch der rechts liegenden Seite angehört, mithin bei der Bildung aller Seitensummen zweimal in Betracht kömmt; so hat die Gesammtsumme aller Seitensummen den Werth $2r(r+1) + r(r+1) = 3r(r+1)$, und da r Polygonseiten in Betracht kommen; so hat die Seitensumme bei der zuletzt erwähnten Anordnung den Werth $3(r+1)$. Beispielsweise ist dieselbe für das Viereck gleich 15, für das Sechseck gleich 21, für das Achteck gleich 27, für das Zehneck gleich 33.

Die Auflösung ist verschieden, jenachdem r das Doppelte einer geraden oder einer ungeraden Zahl ist. Im ersten Falle, wo $r = 4s$ ist, stellen wir das Gesetz der einen Polygonhälfte, in welcher die obere Hälfte $r+3, r+5, \dots 2r+1$ der ungeraden Zahlen die Zwischenstellen der Seiten einnehmen, folgendermaassen dar

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} r+2 & & 2 & & r+4 & & 4 & & r+6 & & 6 \dots r+2(s-1) & & 2s-2 & & r+2s & & 2s & & 2s+2 \\ & 2r-1 & & 2r-3 & & 2r-5 & & 2r-7 & & 2r-9 \dots & & r+7 & & r+5 & & r+3 & & 2r+1 & \end{array}$$

Das Gesetz der anderen Polygonhälfte, in welcher die untere Hälfte $1, 3, 5, \dots r-1$ der ungeraden Zahlen stehen, ist dieses:

$2s+2 \quad r+2(s+1) \quad 2s+4 \quad r+2(s+2) \quad 2s+6 \quad r+2(s+3) \quad 2s+8 \ldots 2r-2 \quad r \quad 2r \quad r+2$
$r-1 \quad r-3 \quad r-5 \quad r-7 \quad r-9 \quad r-11 \quad \ldots \quad 5 \quad 3 \quad 1$

So hat man z. B. folgende magische Einfassung für das Vier-, Acht-, Zwölf- und Sechzehneck resp. mit den Seitensummen 15, 27, 39, 51.

4-eck: 6 2 4 8 6
7 9 3 1

8-eck: 10 2 12 4 6 14 8 16 10
15 13 11 17 7 5 3 1

12-eck: 14 2 16 4 18 6 8 20 10 22 12 24 14
23 21 19 17 15 25 11 9 7 5 3 1

16-eck: 18 2 20 4 22 6 24 8 10 26 12 28 14 30 16 32 18
31 29 27 25 23 21 19 33 15 13 11 9 7 5 3 1

35. Wenn die Anzahl der Polygonseiten das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $r=2(2s+1)$ ist; so ergiebt sich für die magische Einfassung aus den $2r$ Zahlen 1, 2, $\ldots r$ und $r+3$, $r+5$, $\ldots 2r+1$ mit lauter geraden Eckzahlen ein ziemlich komplizirtes Gesetz.

Für die erste Hälfte des Polygons, in welcher die r grösseren ungeraden Zahlen $r+3$, $r+5$, $\ldots 2r+1$ stehen, gilt das Bildungsgesetz

$2r-2 \quad 2 \quad r \quad 4 \quad r+2 \ldots 6s-2 \quad 2s \quad 6s \quad 2s+2$
$r+3 \quad 2r+1 \quad 2r-1 \quad 2r-3 \quad \ldots \quad r+9 \quad r+7 \quad r+5$

In der ersten Ecke steht die Zahl $2r-2=8s+2$, hierauf folgen in der zweiten, vierten, sechsten Ecke u. s. w. die Zahlen 2, 4, 6, $\ldots 2s+2$ und in der dritten, fünften, siebenten Ecke u. s. w. die Zahlen r, $r+2$, $r+4$, $\ldots 6s$. In der Mitte der ersten Seite steht die unterste der r grösseren geraden Zahlen $r+3$, in der Mitte der zweiten Seite steht die oberste dieser Zahlen $2r+1$ und nun in der Mitte der dritten, fünften, siebenten Seite u. s. w. die sukzessiv abfallenden Zahlen $2r-1$, $2r-3$, $2r-5 \ldots r+5$.

Für die andere Hälfte des Polygons, in welcher die r kleineren geraden Zahlen 2, 4, 6, $\ldots 2r$ stehen, gilt das Gesetz

$2s+2$	$6s+6$	$6s+2$	$6s+4$	$2s+6$	$6s+10$	$2s+4$	$6s+8$	$2s+10$	$6s+14$	$2s+8$	$6s+1$
$r+5$	$r-1$	1	3	$r-3$	$r-9$	$r-7$	$r-5$	$r-11$	$r-17$	$r-15$	$r-13$

In der ersten und dritten Ecke steht das Zahlenpaar $6s+6$, $6s+4$, in der fünften und siebenten Ecke $6s+10$, $6s+8$, in der neunten und elften Ecke $6s+14$, $6s+12$ u. s. f., in der zweiten Ecke steht die Zahl $6s+2$, in der vierten und sechsten Ecke das Paar $2s+6$, $2s+4$, in der achten und zehnten Ecke $2s+10$, $2s+8$ u. s. w., sodass je 4 zusammenstehende Zahlen zwei Paare oder einen Vierling von bestimmten Differenzen bilden, welcher mit dem vorhergehenden in Kontinuität steht. In der Mitte der ersten, zweiten, dritten Seite stehen die drei Zahlen $r-1$, 1, 3, in der vierten, fünften, sechsten, siebenten Seite $r-3$, $r-9$, $r-7$, $r-5$, in der achten, neunten, zehnten, elften Seite $r-11$, $r-17$, $r-15$, $r-13$ u. s. w., sodass je vier zusammenstehende ungerade Zahlen einen mit den geraden Zahlen korrespondirenden Vierling bilden. Der Schluss der oberen und unteren Reihe ist ein verschiedener, jenachdem s eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Für ein ungerades s [z. B. für ein Vierzehneck, wofür $r = 2(2.3+1)$ oder für ein Zweiundzwanzigeck, wofür $r = 2(2.5+1)$ ist], entwickeln sich die Reihen vollständig und schliessen so:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & r-8 & 2r-6 & r-2 & 2r & r-4 & 2r-2 \\ \ldots & 17 & 11 & 5 & 7 & 9 & \end{array}$$

wobei die letzten vier geraden Zahlen $r-2$, $2r$, $r-4$, $2r-2$, deren letzte $2r-2$ gleich der ersten aus der vorhin beschriebenen ersten Polygonhälfte ist, den letzten vollständigen Vierling der ganzen Reihe bilden, mit welchem die vier letzten ungeraden Zahlen korrespondiren. (Beim Vierzehneck erstreckt sich der vorstehende Schluss nur bis zur Ecke $2r-6$.) Für ein gerades s (z. B. für ein Achtzehneck, wofür $r = 2(2.4+1)$ oder für ein Sechsundzwanzigeck, wofür $r = 2(2.6+1)$ ist, schliessen die Reihen so:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & r-4 & 2r-4 & r-6 & 2r & r-2 & 2r-2 \\ \ldots & 11 & 13 & 9 & 5 & 7 & \end{array}$$

es nimmt nämlich unbedingt die gerade Zahl $2r-2$ die letzte und die Zahl $2r$ die vorvorletzte Stelle ein und die um

zwei Stellen davor stehende Zahl $2r-4$ bildet die Hälfte des letzten Paares in der Fortsetzung der mit $6s+6$, $6s+4$ beginnenden Reihe, während die vorletzte Zahl $r-2$ die Hälfte des letzten Paares in der Fortsetzung der mit $2s+6$, $2s+4$ beginnenden Reihe bildet:

Im Sechseck, wofür $r=2(2.1+1)$ ist, welches also der ersten Klasse angehört, und im Zehneck, wofür $r=2(2.2+1)$ ist, welches also der zweiten Klasse angehört, kömmt das vorstehende Bildungsgesetz noch nicht vollständig zur Entwicklung; diese beiden Polygone bilden gewissermaassen Rudimente des allgemeinen Gesetzes. Zur Erläuterung lassen wir die magische Gruppirung für das Sechs-, Zehn-, Vierzehn-, Achtzehn-, Zweiundzwanzig- und Sechsundzwanzigeck folgen, deren Seitensumme resp. 21, 33, 45, 57, 69, 81 ist.

6-eck: 10 2 6 4 12 8 10
9 13 11 5 1 3

10-eck: 18 2 10 4 12 6 20 8 16 14 18
13 21 19 17 15 7 5 9 3 1

14-eck: 26 2 14 4 16 6 18 8 24 20 22 12 28 10 26
17 29 27 25 23 21 19 13 1 3 11 5 7 9

18-eck: 34 2 18 4 20 6 22 8 24 10 30 26 28 14 32 12 36 16 34
21 37 35 33 31 29 27 25 23 17 1 3 15 11 13 9 5 7

22-eck: 42 2 22 4 24 6 26 8 28 10 30 12 36 32 34 16 40 14 38 20 44 18 42
25 45 43 41 39 37 35 33 31 29 27 21 1 3 19 13 15 17 11 5 7 9

26-eck: 50 2 26 4 28 6 30 8 32 10 34 12 36 14 42 38 40 18 46 16 44 22 48 20 52 24 50
29 53 51 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 25 1 3 23 17 19 21 15 11 13 9 5 7

36. Es liegt auf der Hand, dass wenn man in diesen Reihen für jede ungerade Zahl $1+2t$ eine Zahl $a+2td$ und für jede gerade Zahl $2t$ eine Zahl $b+2td$ substituirt, man eine magische r-eckige Einfassung mit drei Zahlen in jeder Seite aus den beiden Progressionen a, $a+2d$, $a+4d$, $a+6d$, ... und b, $b+2d$, $b+4d$, $b+6d$, ... erhält.

Diese Thatsache ermöglicht es, die aufeinander folgenden Einfassungen eines magischen r-eckes zunächst mit je drei Zahlen zu besetzen. Man braucht zu dem Zwecke, da für x Einfassungen ausser dem Zentrum stets $2x$ r-gliedrige

Progressionen erforderlich sind, von der gegebenen Zahlenreihe 1, 2, ... p vom linken und vom rechten Ende immer nur $2r$ Zahlen abzuschneiden, was bei y-maliger beiderseitiger Abschneidung $4yr$ Zahlen zu $4y$ solchen Progressionen giebt. Ist x gerade, also $2x=4y$; so braucht man nur die in jeder abgeschnittenen Gruppe von $2r$ Zahlen liegenden geraden und ungeraden Zahlen wie die geraden und ungeraden Zahlen im vorstehenden Gesetze zu behandeln, um ebenso viel Einfassungen, als man $2r$-gliedrige Gruppen hat, zu besetzen. Ist x ungerade; so nehmen wir die in dem einen der beiden mittelsten Abschnitte liegenden ungeraden Zahlen für die ungeraden und die in dem anderen Abschnitte liegenden ungeraden Zahlen für die geraden Zahlen der gesetzlichen Reihe einer Einfassung an. (Man hann auch die geraden Zahlen beider Abschnitte in dieser Weise behandeln.) Von den übrig bleibenden Zahlen kömmt die mittelste in das Zentrum des Polygons und die übrigen, welche sich wegen ihrer symmetrischen Stellung paarweise zu der Summe $p+1$ ergänzen, werden zur Ausfüllung der Lücken in der dritten, vierten u. s. w. Einfassung verwendet.

37. Wir haben in den drei letzten Nummern die Konstruktion einer polygonalen Einfassung aus einer Zahlenreihe, in welcher das mittelste Glied fehlt, behandelt, weil sich aus solchen Zahlen ein Polygon mit lauter geraden Eckzahlen und einer ungeraden Zwischenzahl bilden lässt. In anderer Beziehung ist jedoch auch die Konstruktion eines Polygons aus der ununterbrochenen Zahlenreihe 1, 2, ... $2r$ wichtig. Da die Summe dieser Zahlen gleich $r(2r+1)$ und die Summe aller geraden Zahlen $r(r+1)$, der Inbegriff dieser beiden Summen aber $r(3r+2)$ ist; so müsste, wenn aus jenen Zahlen ein Polygon mit lauter geraden Eckzahlen gebildet werden sollte, die Seitensumme gleich $3r+2$ sein. Diess ist unmöglich, weil die Zahl $3r+2$ eine gerade ist, welche nicht aus der Summe zweier geraden Eckzahlen und einer ungeraden Zwischenzahl bestehen kann. Aus der Reihe 1, 2, ... $2r$ kann also kein Polygon mit lauter geraden Eckzahlen und je einer ungeraden Zwischenzahl ge-

bildet werden, wohl aber ein Polygon mit $r-2$ geraden Ecken und einer Seite mit zwei ungeraden Ecken. In dieser letzten Seite ist auch die Zwischenzahl ungerade. Indem man zwei gerade Zahlen in die Zwischenstellen der beiden links und rechts an die letztere Seite sich anschliessenden Seiten unterbringt, erhält man eine Gruppirung, deren Bildungsgesetz mit den in Nr. 34 und 35 entwickelten Gesetzen organisch verbunden ist (nur das Sechseck macht eine später zu erwähnende Ausnahme). Übrigens ist auch hier zu unterscheiden, ob r das Doppelte einer geraden oder einer ungeraden Zahl ist.

Wenn $r = 4s$ das Doppelte einer geraden Zahl ist, bleibt für das gedachte Polygon das Gesetz dem in Nr. 34 dargestellten bis auf die letzte und die beiden angrenzenden Seiten ganz gleich. Nimmt man nämlich als letzte Seite diejenige, in deren Mitte dort die grösste Zahl $2r+1$ steht; so braucht man nur die drei Seiten

$$\begin{array}{ccccccc} r+2s & & 2s & & 2s+2 & & r+2(s+1) \\ & r+3 & & 2r+1 & & r-1 & \end{array}$$

folgendermaassen unter Vertauschen der Zahl $2r+1$ und $r+1$ zu transformiren

$$\begin{array}{ccccccc} r+2s & & r+3 & & r-1 & & r+2(s+1) \\ & 2s & & r+1 & & 2s+2 & \end{array}$$

Beispielsweise erhält man für das Vier- und Achteck:

4-eck: 6 7 3 8 6
2 5 4 1

8-eck: 10 2 12 11 7 14 8 16 10
15 13 4 9 6 5 3 1

Obgleich die Gesammtsumme der in die polygonale Einfassung eintretenden Zahlen jetzt nur gleich $r(2r+1)$, also um r Einheiten kleiner ist, als in Nr. 34; so behält doch die Seitensumme den Werth $3(r+1)$. Die Summe aller Eckzahlen ist jetzt gleich $r(r+2)$ und die aller Zwischenzahlen gleich $r(r-1)$.

38. Wenn die Anzahl der Polygonseiten $r = 2(2s+1)$ das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, ergreift die Trans-

formation das in Nr. 35 dargestellte Gesetz in seiner ganzen Ausdehnung. Diese Transformation geht ebenfalls von den drei Seiten aus, in deren mittelster Zwischenstelle die Zahl $2r+1$ steht. Diese drei Seiten

$$\begin{array}{ccccccc} 2r-2 & & 2 & & r & & 4 \\ & r+3 & & 2r+1 & & 2r-1 & \end{array}$$

transformiren sich zunächst unter Vertauschung der Zahl $2r+1$ mit 1 so:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & r+3 & & 2r-1 & & r \\ & 2r-2 & & 1 & & 4 & \end{array}$$

In den links und rechts an diese drei Seiten sich anschliessenden Seiten erfolgt nun eine Verstellung der Eck- und Zwischenzahlen, welche wir, von links nach rechts gehend, folgendermaassen darstellen. Zunächst werden bis vor die Eckzahl $6s+6$ immer je zwei benachbarte Eckzahlen vertauscht, also aus

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 4 & & r+2 & & 6 & & r+4 & & 8 \dots & & 6s & & 2s+2 \\ & 2r-3 & & 2r-5 & & 2r-7 & & 2r-9 & & \dots & & r+5 & & r-1 \end{array}$$

die nachstehende Reihe gebildet

$$\begin{array}{ccccccccccccc} r & & 6 & & r+2 & & 8 & & r+4 \dots & & 2s+2 & & 6s \\ & 2r-3 & & 2r-5 & & 2r-7 & & 2r-9 & & \dots & & r+5 & & 5 \end{array}$$

Die jetzt folgenden vier Seiten

$$\begin{array}{ccccccccc} 2s+2 & & 6s+6 & & 6s+2 & & 6s+4 & & 2s+6 \\ & r-1 & & 1 & & 3 & & r-3 & & r-9 \end{array}$$

werden so transformirt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 6s & & 6s+4 & & 6s+2 & & 2s+6 & & 6s+6 \\ & 5 & & 3 & & r-1 & & r-5 & & r-3 \end{array}$$

Hierauf werden je zwei der kommenden Eckzahlen miteinander vertauscht, es wird also aus

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & 6s+10 & & 2s+4 & & 6s+8 & & 2s+10 & & 6s+14 & & 2s+8 & & 6s+12 & & 2s+14 \dots \\ r-9 & & r-7 & & r-5 & & r-11 & & r-17 & & r-15 & & r-13 & & r-19 & & \dots \end{array}$$

diese Reihe gebildet

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & 2s+4 & & 6s+10 & & 2s+10 & & 6s+8 & & 2s+8 & & 6s+14 & & 2r+14 & & 6s+12 \dots \\ r-3 & & r-7 & & r-13 & & r-11 & & r-9 & & r-15 & & r-21 & & r-19 & & \dots \end{array}$$

Der Schluss dieser Reihe und des ganzen Polygons ist verschieden, jenachdem s eine gerade oder ungerade Zahl

ist. Ist s **ungerade**, wie für $r=14$ oder 22; so geht die Verwechslung je zweier benachbarten Eckzahlen bis zu Ende fort; es bildet sich also aus den letzten **beiden** Eckzahlen $2r$ und $r-4$ im Anschlusse an die erste Eckzahl $2r-2$, also aus

$$\begin{array}{cccc} \ldots & 2r & r-4 & 2r-2 \\ & & 7 \quad\quad 9 & \end{array}$$

der Schluss

$$\begin{array}{cccc} \ldots & r-4 & 2r & 2 \\ & & 7 \quad\quad r+1 & \end{array}$$

Ist dagegen s **gerade**, wie für $r=26$; so geht die Vertauschung je zweier benachbarten Eckzahlen nur so weit, dass sich aus den letzten **sechs** Eckzahlen im Anschlusse an die erste Eckzahl $2r-2$, nämlich aus

$$\begin{array}{l} \ldots\ 8s-4 \quad r-4 \quad 2r-4 \quad r-6 \quad 2r \quad r-2 \quad 2r-2 \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\quad 11 \qquad\quad 13 \qquad 9 \qquad 5 \qquad 7 \end{array}$$

folgender Schluss bildet

$$\begin{array}{l} \ldots\ r-6 \quad 8s-4 \quad r-2 \quad 2r-4 \quad r-4 \quad 2r \quad 2 \\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 9 \qquad\quad 11 \qquad\quad 7 \quad r+1 \end{array}$$

Beispielsweise hat man für das Vierzehn-, Zweiundzwanzig- und Sechsundzwanzigeck

14-eck: 2 17 27 14 6 16 8 18 22 20 12 24 10 28 2
26 1 4 25 23 21 19 5 3 13 9 11 7 15

22-eck: 2 25 43 22 6 24 8 26 10 28 12 30 34 32 16 36 14 40 20 38 18 44 2
42 1 4 41 39 37 35 33 31 29 27 5 3 21 17 19 15 9 11 13 7 23

26-eck: 2 29 51 26 6 28 8 30 10 32 12 34 14 36 40 38 18 42 16 46 20 44 24 48 22 52 2
50 1 4 49 47 45 43 41 39 37 35 33 31 5 3 25 21 23 19 15 17 13 9 11 7 27

Noch nicht vollständig kömmt dieses Gesetz zur Erscheinung beim Achtzehneck, indem man für $r=18$ folgende Gruppirung erhält

18-eck: 2 21 35 18 6 20 8 22 10 24 26 28 12 30 14 32 16 36 2
34 1 4 33 31 29 27 25 23 7 3 17 15 13 11 9 5 19

Auch im Zehneck kömmt das allgemeine Gesetz nicht zum Ausdruck, indem sich die zwischen den beiden diametral einander gegenüber stehenden Eckzahlen 14 und 12 liegenfünf Seiten

14 8 2 10 4 12 in 14 2 13 19 10 12
1 13 21 19 17 17 18 1 4 11

transformiren lassen und die übrigen fünf Seiten ungeändert bleiben. Die vollständige Gruppirung für $r = 10$ ist also

10-eck: 14 2 13 19 10 12 6 20 8 16 14
17 18 1 4 11 15 7 5 9 3

Schliesslich haben wir des Sechseckes zu gedenken. Dasselbe gestattet keine magische Einfassung, in welcher nur eine einzige Seite mit ungeraden Zahlen besetzt wäre, sondern nur eine solche Gruppirung, in welcher zwei unmittelbar zusammenstossende Seiten mit lauter, also überhaupt mit fünf ungeraden Zahlen besetzt sind und die sechste ungerade Zahl der mittelsten dieser fünf diametral gegenüber steht, sodass die sechs geraden Zahlen in zwei Ecken und in vier rechts und links neben diesen Ecken liegenden Zwischenstellen stehen. Die Gruppirung ist folgende

6-eck: 9 11 8 3 12 5 9
1 2 10 6 4 7

39. Wenn jede Polygonseite mit einer geraden Anzahl von Zahlen, zunächst also mit vier Zahlen besetzt werden soll, kommen die nachstehenden Sätze in Anwendung.

Sowohl für ein gerades, als auch für ein ungerades r kann man aus einer mit der Differenz 1 steigenden und zwei mit der Differenz -1 fallenden Progressionen nach folgendem Schema, wonach die beiden grössten Zahlen der letzten beiden Progressionen auf beide Seiten der kleinsten Zahl der ersten Progression treten, eine magische Einfassung bilden.

$\ldots a+r-3 \quad a+r-2 \quad a+r-1 \quad a \quad a+1 \quad a+2 \ldots$
$b-r+2 \quad b-r+1 \quad b \quad b-1 \quad b-2$
$c-r+3 \quad c-r+2 \quad c-r+1 \quad c \quad c-1$

Die Seitensumme ist $2a+b+c$. So hat man z. B. für die drei siebengliedrigen Progressionen 1, 2, ... 7, ferner 8, 9, ... 14 und 15, 16, ... 21 die siebenseitige Einfassung mit der Seitensumme 37

4	5	6	7	1	2	3	4
	10	9	8	14	13	12	11
	18	17	16	15	21	20	19

Nimmt man statt der mit den Differenzen ± 1 steigenden und fallenden Progressionen solche resp. mit den Differenzen $\pm d$; so behält die Seitensumme den Werth $2a+b+c$.

40. Nur für ein ungerades r gilt folgender Satz. Wenn man mit der ersten Progression immer eine Ecke überspringt, an die Stelle der zweiten Progression eine mit der gleichen Differenz und an die Stelle der dritten Progression eine fallende Progression mit doppelter Differenz setzt und die kleinste Zahl der zweiten, sowie die grösste Zahl der dritten links neben die kleinste Zahl der ersten stellt; so ergiebt sich die magische Einfassung

$\ldots a+s-1$	$a+r-1$	$a+s$	a	$a+s+1$	$a+1\ldots$
$b+r-2$	$b+r-1$	b	$b+1$	$b+2$	
$c-2r+4$	$c-2r+2$	c	$c-2$	$c-4$	

mit der Seitensumme $2a+b+c+s$. Beispielsweise ergeben die drei siebengliedrigen Progressionen 1, 2, ... 7, ferner 8, 9, ... 14 und 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 die siebenseitige Einfassung mit der Seitensumme 40:

3	7	4	1	5	2	6	3
	13	14	8	9	10	11	12
	17	15	27	25	23	21	19

Substituirt man für die Progressionen mit den Differenzen $+1$, $+1$, -2 solche mit den Differenzen $+d$, $+d$, $-2d$; so wird die Seitensumme $2a+b+c+sd$.

Wenn man statt der ersten Progression mit der Differenz 1 eine solche mit doppelter Differenz 2 setzt, kann man für die anderen beiden zwei fallende Progressionen mit der Differenz -1 nehmen, um folgende Einfassung mit der Seitensumme $2a+b+c+2s$ zu erhalten

$\ldots a+2s-2$	$a+2r-2$	$a+2s$	a	$a+2s+2$	$a+2\ldots$
$b-r+2$	$b-r+1$	b	$b-1$	$b-2$	
$c-r+2$	$c-r+1$	c	$c-1$	$c-2$	

Verwandelt man die Differenzen 2 und -1 resp. in $2d$ und $-d$; so wird die Seitensumme $2a+b+c+2sd$.

41. Folgender Satz hat sowohl für ein gerades, als auch für ein ungerades r Gültigkeit. Um aus den $p=4r$ Zahlen 1, 2, ... p einen r-eckigen Kern von r Zahlen und eine r-eckige Einfassung von $3r$ Zahlen zu bilden, werden die r geraden Zahlen 4, 8, 12, ... p, welche die Vierfachen von 1, 2, 3, ... r sind, in die Ecken des inneren Kernes gestellt. Die übrigen r geraden Zahlen 2, 6, 10, 14, ... $p-2$ nehmen die Ecken der zweiten Einfassung ein. In die ersten Zwischenstellen jeder Seite kommen die r ungeraden Zahlen 1, 5, 9, 13, ... $p-3$ und in die zweiten Zwischenstellen die übrigen r ungeraden Zahlen 3, 7, 11, 15, ... $p-1$. Die Reihenfolge, in welcher diese Zahlen zu versetzen sind, zeigt das nachstehende Schema

$p-2$	$p-6$	$p-14$ ...	18	10	2	6	14 ...	$p-18$	$p-10$	$p-2$
5	13	...	$p-11$	$p-3$	$p-7$	$p-15$	...	9	1	
3	7	...	$p-17$	$p-9$	$p-1$	$p-5$	...	19	11	

Es werden nämlich die geraden Zahlen von der Ecke an, in welche man die kleinste Zahl 2 setzt, abwechselnd in die rechts und links folgende Ecke gesetzt, sodass die grösste Zahl $p-2$ der ersten Ecke diametral gegenüber liegt. Alsdann nimmt die grösste ungerade Zahl $p-3$ der Reihe 1, 5, 9 ... die erste Zwischenstelle links von der ersten Ecke ein und es folgen nun in absteigender Ordnung die übrigen Zahlen dieser Reihe abwechselnd rechts und links. Hierauf wird die grösste ungerade Zahl $p-1$ der Reihe 3, 7, 11 ... in die zweite Zwischenstelle rechts von der ersten Ecke gesetzt und es folgen die übrigen Zahlen dieser Reihe in absteigender Ordnung abwechselnd rechts und links, sodass sich die beiden kleinsten geraden Zahlen 1 und 3 zu beiden Seiten der Ecke mit der grössten geraden Zahl $p-2$ aufstellen.

Die Seitensumme dieser polygonalen Einfassung ist $2p=8r$.

Beispielsweise erhält man für das Vier-, Sechs-, Acht-, Zehneck folgende äusseren Einfassungen resp. mit den Seitensummen 32, 48, 64, 80.

4-eck: 14 10 2 6 14
5 13 9 1
3 7 15 11

6-eck: 22 18 10 2 6 14 22
5 13 21 17 9 1
3 7 15 23 19 11

8-eck: 30 26 18 10 2 6 14 22 30
5 13 21 29 25 17 9 1
3 7 15 23 31 27 19 11

10-eck: 38 34 26 18 10 2 6 14 22 30 38
5 13 21 29 37 33 25 17 9 1
3 7 15 23 31 39 35 27 19 11

Indem man alle Eckzahlen um 1 vermindert und alle Zwischenzahlen um 1 vergrössert, stellen sich in die Ecke lauter ungerade und in die Zwischenstellen lauter gerade Zahlen nach dem Schema

$p-3$ $p-7$ $p-15$ ... 17 9 1 5 13 ... $p-19$ $p-11$ $p-3$
6 14 ... $p-10$ $p-2$ $p-6$ $p-14$ ... 10 2
4 8 ... $p-16$ $p-8$ p $p-4$ ... 20 12

Die Seitensumme behält den Werth $2p = 8r$. So hat man z. B. für das Viereck mit der Seitensumme 32

13 9 1 5 13
6 14 10 2
4 8 16 12

Für das Drei- und Fünfeck ergiebt sich

3-eck: 10 2 6 10
9 5 1
3 11 7

5-eck: 18 10 2 6 14 18
9 17 13 5 1
3 11 19 15 7

Das vorstehende Gesetz behält Gültigkeit, wenn in den vier Progressionen die Anfangsglieder 1, 2, 3, 4 um denselben Betrag a vergrössert werden, auch dann noch, wenn statt der Differenz 4 irgend eine andere Differenz genommen wird.

42. Um aus einer Reihe natürlicher Zahlen 1, 2, ... p nicht nur eine einzelne r-eckige magische Einfassung mit vier Zahlstellen in jeder Seite zu bilden, sondern eine ganze r-eckige Polygonfläche mit einer geraden Menge von Zahlstellen in allen Seiten auszufüllen, hat man die Sätze aus

Nr. 39, 40, 41 einmal so anzuwenden, dass aus der gegebenen Zahlenreihe die Eckzahlen und die beiden Mittelzahlen aller Seiten einer jeden Einfassung oder zweier benachbarten Einfassungen eine symmetrische Stellung gegen die Mitte dieser Reihe annehmen oder vielmehr, dass diese Zahlen symmetrische Lücken lassen, aus welchen die paarweise in die Einfassungen noch einzusetzenden Füllzahlen zu entnehmen sind.

Soll die Summe der Eckradien einen konstanten Werth annehmen, was im Allgemeinen nur in den Fällen möglich ist, wo die Eckzahlen einer Einfassung eine regelmässige Progression bilden; so muss, wenn eine ungerade Menge von Einfassungen in Betracht kömmt, dafür gesorgt werden, dass unter den Progressionen der Zahlen, welche in die Ecken der Einfassungen treten, sich eine befinde, deren Differenz d doppelt so gross sei, als die aller übrigen (vergl. Nr. 33). Wenn man auf die unbedingte Konstanz der Summe der Eckradien verzichtet und sich damit begnügt, dass diese Summe in den eben bezeichneten Fällen für eine nach Ausschluss des Zentrums verbleibende gerade Menge eigentlicher Einfassungen jedenfalls, für eine ungerade Menge von Einfassungen aber unter Ausschluss der innersten Einfassung konstant sei; so braucht man von den in Nr. 31 bis 41 aufgestellten Sätzen, bei welchen die Eckzahlen regelmässige Progressionen bilden, nur diejenigen in Betracht zu ziehen, in welchen alle Progressionen die Differenz 1 haben oder Strecken der natürlichen Zahlenreihe sind. Die Konstruktion des magischen Polygons nimmt alsdann folgende einfache Gestalt an.

Ist für ein gerades oder ungerades r aus den Zahlen $1, 2, \ldots p$ ein magisches Polygon mit einer ungeraden Menge von Zahlen in jeder Seite zu bilden; so tritt in das Zentrum die Zahl 1. In die zweite Einfassung treten die $2r$ Zahlen $2, 3, \ldots 2r+1$. In die dritte Einfassung treten die $4r$ folgenden Zahlen $2r+2, 2r+3, \ldots 6r+1$, indem die ersten $2r$ dieser Zahlen, nämlich die Zahlen $2r+2$, $2r+3, \ldots 4r+1$ die Ecken und die Mittelstellen einnehmen, die übrigen $2r$ Zahlen, nämlich die Zahlen $4r+2, 4r+3, \ldots$

$6r+1$ paarweise zu den Füllzahlen dieser Einfassung verwandt werden. In die vierte Einfassung treten die $6r$ folgenden Zahlen $6r+2$, $6r+3$, ... $12r+1$, indem die ersten $2r$, nämlich die Zahlen $6r+2$, $6r+3$, ... $8r+1$ die Ecken und die Mittelstellen einnehmen und die übrigen $4r$ Zahlen $8r+2$, $8r+3$, ... $12r+1$ paarweise zu Füllzahlen dienen u. s. w.

Soll jede Seite eine gerade Menge von Zahlen erhalten; so bleibt das Zentrum leer. In die erste Einfassung treten die $3r$ Zahlen $1, 2, \ldots 3r$. In die zweite Einfassung treten die $5r$ folgenden Zahlen $3r+1$, $3r+2$, ... $8r$, indem die ersten $3r$, nämlich die Zahlen $3r+1$, $3r+2$, ... $6r$ die Ecken und die beiden Zwischenstellen einnehmen, die übrigen $2r$ Zahlen aber, nämlich die Zahlen $6r+1$, $6r+2$, ... $8r$ paarweise zu Füllzahlen dienen. In die dritte Einfassung treten die $7r$ folgenden Zahlen $8r+1$, $8r+2$, ... $15r$, indem die ersten $2r$, nämlich die Zahlen $8r+1$, $8r+2$, ... $10r$ in die Ecken und beiden Zwischenstellen treten und die übrigen $5r$, nämlich die Zahlen $10r+1$, $10r+2$, ... $15r$ paarweise zu Füllzahlen benutzt werden.

In den auf diese Weise entstehenden magischen Polygonen legen sich die höheren Zahlen schichtenweise um die niedrigeren, sodass jedes fertige Polygon durch Anlagerung neuer Zahlen nach aussen weitergebildet werden kann. Man könnte diese Polygone, welche bis jetzt noch nicht behandelt sind, als geschichtete Polygone bezeichnen. Dass man die kleineren Zahlen auch in die äusseren und die grösseren in die inneren Einfassungen legen kann, leuchtet ein.

Ein nach dem Satze Nr. 39 konstruirtes geschichtetes magisches Quadrat dieser Art von 64 Zahlen ist z. B. folgendes

40	58	62	41	46	51	55	39
56	17	34	28	23	31	18	59
52	32	8	9	14	7	35	63
47	24	13	1	2	10	27	44
42	25	12	4	3	15	22	45
61	33	5	16	11	6	30	50
57	20	29	21	26	36	19	54
37	53	49	48	43	64	60	38

In der ersten Einfassung stehen die Zahlen 1 bis 4, welche noch keine magische Figur bilden. In der zweiten Einfassung stehen die Zahlen 5 bis 16 mit der Seitensumme 38; ausserdem ist die Summe der Eckradien für das aus den ersten beiden Einfassungen bestehende Quadrat gleich 9. In der dritten Einfassung stehen die Zahlen 17 bis 36 mit der Seitensumme 151. In der vierten Einfassung stehen die Zahlen 37 bis 64 mit der Seitensumme 392; die Eckradien des Gesammtquadrates bilden die Summe 66.

Aus einer ungeraden Zahlenmenge kann das magische Quadrat nur nach dem Satze Nr. 37 gebildet werden, welcher keine konstante Summe der Eckradien gestattet. Ein Beispiel ist das nachstehende Quadrat aus 49 Zahlen.

32	39	35	30	48	44	28
45	15	19	10	24	17	40
49	25	8	6	4	20	36
27	11	3	1	5	13	29
34	18	7	2	9	23	47
38	16	22	14	21	12	43
31	42	46	26	37	41	33

43. Nach Nr. 31 lassen sich, wenn $r = 2s + 1$ ungerade ist, die r Zahlen $1, 2, \ldots r$ so in die Ecken eines r-ecks stellen, dass je zwei benachbarte Zahlen mit einer der Zahlen $r+1, r+2, \ldots 2r$ die Summe $5s+4$ bilden. Hieraus folgt, dass unter den Summen der Nachbaren der in dieser Weise gruppirten Zahlen alle Werthe $s+2, s+3, \ldots 3s+2$ vorkommen.

Nach Nr. 34 oder 35 lassen sich, wenn $r = 2s$ gerade ist, die r geraden Zahlen $2, 4, \ldots 2r$ so in die Ecken eines r-ecks stellen, dass zwei benachbarte Zahlen mit je einer der ungeraden Zahlen $1, 3, \ldots r-1$ und $r+3, r+5, \ldots 2r+1$ die Summe $3(r+1)$ bilden. Hiernach enthalten die Summen zweier benachbarten geraden Zahlen alle Werthe $r+2, r+4, r+6, \ldots 2r$ und $2r+4, 2r+6, 2r+8, \ldots 3r+2$. Halbirt man die aufgestellten geraden Zahlen; so

bleiben die r natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots r$ zurück, von welchen je zwei Nachbaren die Summen $s+1, s+2, \ldots 2s$ und $2s+2, 2s+3, \ldots 3s+1$ bilden.

44. Symmetrisch nennen wir ein aus lauter magischen Einfassungen bestehendes Polygon, wenn auch die Durchmesser (resp. Halbmesser) jeder Einfassung und gewisse auf den Einfassungen normal stehenden Linien konstante Summen bilden. Für ein gerades r (Fig. 13) sind als Durchmesser alle durch zwei diametrale Ecken oder durch zwei diametrale Seitenmitten gehenden Linien wie AD oder MN zu betrachten. (Für ein gerades n giebt es immer zwei parallele Zwischendurchmesser EF und ef, welche als ein Doppeldurchmesser $EF+ef$ gelten.) Wenn von irgend einem Punkte E' irgend einer Seite $A'B'$ einer beliebigen Einfassung $A'B'C'D'$ normal zu der Seite $A'B'$ die Linie $E'E$ und in ihrer Verlängerung die gegenüberliegende Linie $F'F$ gezogen wird; so enthalten in dem symmetrischen Polygone die beiden Strecken $GH+KL$, welche zwischen zwei beliebigen Einfassungen liegen, ringsherum im ganzen Polygone dieselbe Summe. Für ein ungerades r kommen statt der Durchmesser AD die Eckradien JA und die auf den Seitenmitten normal stehenden Zwischenradien, welche bei der Gruppirung nach Fig. 11 für ein ungerades n einfache Linien JL, bei der Gruppirung nach Fig. 12 für ein gerades n Doppellinien $A'L+B'M$ sind, und statt der Doppelstrecken $GH+KL$ (Fig. 13) die einfachen Strecken GH in Betracht. Die Symmetrie des Polygons verlangt dann, dass entweder die Radien der ersten, dritten, fünften ... oder dass die der zweiten, vierten, sechsten ... Einfassung, und zwar die Eckradien für sich und die Zwischenradien für sich, sowie auch, dass die den Abständen dieser Einfassungen entsprechenden einfachen Strecken GH, wenn immer zwei gegen die betreffende Seitenmitte symmetrisch belegene wie $GH+gh$ zusammengefasst werden, konstante Summen bilden. (Hinsichtlich der für ein gerades n sich ergebenden doppelten Zwischenradien $A'L+B'M$ in Fig. 12 ist jedoch zu bemerken, dass der polygonale Kern $A'B'C'D'E'$ wie nicht

vorhanden zu betrachten ist.) Zieht man von den Ecken irgend einer Einfassung die Normalen $A'L$ und $B'M$ bis zur äusseren Einfassung; so enthält für ein ungerades r der Linienzug $LA'B'M$ und für ein gerades r dieser und der gegenüberliegende Linienzug für alle Seiten des Polygons dieselbe Summe.

Zur Konstruktion solcher Polygone dienen folgende Sätze.

45. Ein r-eck, dessen äusserste Einfassung n Stellen hat, enthält in dieser ersten Einfassung $r(n-1)$ Zahlen, in der zweiten Einfassung $r(n-3)$, in der dritten $r(n-5)$ u. s. w., im Ganzen, wenn n gerade $=2m$ ist, in allen m Einfassungen $p=\frac{1}{4}rn^2=rm^2$, und wenn n ungerade $=2m+1$ ist, in allen $m+1$ Einfassungen $p=\frac{1}{4}r(n^2-1)+1$ $=rm(m+1)+1$ Zahlen.

Für ein ungerades r liefern die in Nr. 42 gegebenen Regeln ein symmetrisches Polygon, wenn man die betreffenden Progressionen abwechselnd steigend und fallend um das Polygon laufen lässt. Ein solches Polygon kann zugleich ein geschichtetes sein. Wenn man auf die Schichtung verzichtet, ergiebt sich ein symmetrisches Polygon nach Nr. 31 aus den p Zahlen $1, 2, \ldots p$, indem man für die äusserste Einfassung, wenn $n=2m+1$ ungerade ist, nicht die Zahlen $1, 2, \ldots 2rm$, sondern die Zahlen $1, 2, \ldots rm$ und ihre Ergänzungen zu $p+1$, sodann für die zweite Einfassung die Zahlen $rm+1$, $rm+2$, $\ldots 2r(m-1)$ und ihre Ergänzungen zu $p+1$, für die dritte Einfassung die Zahlen $2r(m-1)+1$, $2r(m-2)+2$, $\ldots 3r(m-2)$ u. s. w. wählt, sodass in den Mittelpunkt des Polygons sich die mittelste Zahl $\frac{1}{2}(p+1)$ stellt. Man kann dann in die Ecken der ersten Einfassung die Zahlen $1, 2, \ldots rm$ und in die Seitenmitten die Ergänzungen dieser Zahlen stellen: man kann aber auch umgekehrt verfahren. Im ersten Falle wird, wenn $r=2s+1$ gesetzt wird, die Seitensumme $m(p+1)$ $+s+1$, im zweiten Falle wird sie $(m+1)(p+1)-(s+1)$.

Beispielsweise bilden nach der zweiten Anordnung $p=101$ Zahlen für $n=9$ folgendes symmetrische Fünfeck, dessen erste, zweite, dritte, vierte Einfassung resp. die

Seitensummen 507, 385, 268, 156 und dessen erste und dritte Einfassung die Eckradien 347 und 118, sowie die Zwischenradien 163 und 137 haben, während alle symmetrisch liegenden Doppelabstände für je eine, zwei, drei Einfassungen die Summen 1 . 102, 2 . 102 = 204, 3 . 102 = 306 bilden.

100
83 18
88 78 13
93 32 69 8
4 27 65 74 3
9 22 58 43 23 94
14 75 39 53 38 28 89
19 70 44 47 48 59 33 84
97 81 62 56 51 55 63 80 98
82 31 57 46 49 42 68 17
87 26 40 54 50 52 37 73 12
92 21 45 60 24 7
5 76 64 61 36 41 66 29 2
10 71 34 95
15 79 35 30 25 72 67 77 90
20 85
99 86 91 96 1 6 11 16 101

Wenn $n = 2m$ gerade ist, gruppiren sich die Zahlen zu einem symmetrischen Polygone nach Nr. 39, wenn man dafür sorgt, dass die zur Besetzung der Ecken und zweier Zwischenstellen in jeder Einfassung, einschliesslich der Ecken des Kernpolygons, erforderlichen Zahlen, deren Anzahl ein Vielfaches von r ist, aus lauter Reihen von je r aufeinander folgenden Zahlen gebildet werden und dass diese Reihen in ihrer Gesammtheit ein gegen die Mitte der Zahlenreihe 1, 2, $\ldots p$ symmetrisch belegenes Stück bilden, was stets leicht ist. Die offen bleibenden Zwischenstellen sind dann durch die übrig bleibenden Zahlen mit Paaren von der Summe $p + 1$ auszufüllen.

Je nach der Disposition über die eben erwähnten r-gliedrigen Reihen kann man der Seitensumme der äussersten Einfassung verschiedene Werthe verschaffen. Diese Summe ist nach Nr. 39 für die beiden Eck- und die beiden Mittelzahlen gleich $2a+b+s$, also für alle n Zahlen einer Seite gleich $2a+b+s+(m-2)(p+1)$. Nimmt man z. B. $a=1$, $b=2r$, $c=p$, so wird die Seitensumme $(m-1)(p+1)+2r+1$; nimmt man $a=r+1$, $b=r$, $c=p$, so wird diese Summe $(m-1)(p+1)+3r+1$; nimmt man $a=p-r+1$, $b=r$, $c=2r$, so wird die Summe $m(p+1)+r$; nimmt man $a=1$, $b=p-r$, $c=p$, so wird die Summe $m(p+1)-r$; nimmt man $a=p-2r+1$, $b=r$, $c=p$, so wird die Summe $(m+1)(p+1)-(3r+1)$; nimmt man $a=p-r+1$, $b=r$, $c=p-r$, so wird die Summe $(m+1)(p+1)-(2r+1)$. So erhält man aus $p=80$ Zahlen folgendes symmetrische Fünfeck mit $n=8$ Stellen in den äussersten Seiten.

1

26 54

31 15 49

10 36 44 80

76 70 16 72 9

50 71 25 65 66 32

55 45 61 60 24 37 27

5 11 20 56 59 17 14 2

30 40 21 57 58 64 43 53

35 69 62 23 73 48

6 75 19 22 63 18 67 79

77 41 38 8

46 12 39 68 74 42 13 33

51 28

4 29 34 7 78 47 52 3

In diesem Fünfecke ist die äusserste Seitensumme $3.81+2.5+1=254$; die Eckradien haben die Summe 92, die doppelten mittleren Zwischenradien haben in der letzten und vorletzten und auch in der vorletzten und vorvorletzten Ein-

fassung die Summe 227. Je zwei symmetrisch liegende doppelte Zwischenstrecken haben für je eine Einfassung die Summe 81 und für je zwei Einfassungen die Summe $2.81 = 162$ (wobei der Kern und die darauf folgende Einfassung ausgeschlossen bleibt).

46. Für ein gerades r kommen einige ganz besondere Sätze in Betracht. Ist zunächst die Stellenzahl in der äusseren oder letzten Einfassung eine ungerade Zahl $n = 2m + 1$; so ist die gesammte Zahlenmenge, wovon eine den Mittelpunkt des Polygons einnimmt, $p = rm(m + 1) + 1$. Wenn das von der vorletzten Einfassung eingeschlossene Polygon ein symmetrisches magisches ist; so wird auch das von der letzten Einfassung eingeschlossene Polygon ein symmetrisches magisches sein, wenn diese letzte Einfassung eine konstante Seitensumme hat und in jeder Seite n Stellen, im Ganzen also $r(n - 1) = 2rm$ Stellen enthält, die durch die rm Zahlen $1, 2, \ldots rm$ und ihre Ergänzungen zu $p + 1$ dergestalt ausgefüllt werden, dass die einander diametral gegenüberstehenden Eckzahlen wie A und D oder B und C (Fig. 13), sowie je zwei Zahlen, welche in einer Linie wie EF (Fig. 13) einander direkt gegenüberstehen, die Summe $p + 1$ bilden, indem alsdann die r Eckzahlen die Summe $\frac{1}{2}r(p + 1)$ bilden, und die konstante Seitensumme den Werth $\frac{1}{2}n(p + 1)$ annimmt. Es lässt sich wie in Nr. 25 leicht zeigen, dass diese Bedingungen erfüllt werden, wenn die in irgend eine Seite wie AB eintretenden $m + 1$ Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots rm$ eine Summe bilden, welche die Summe der in die gegenüberliegende Seite CD eintretenden m Zahlen dieser Reihe um $\frac{1}{2}(p + 1) = \frac{1}{2}rm(m + 1) + 1$ überschreitet.

Was soeben von der letzten Einfassung gesagt ist, gilt auch von der vorletzten und jeder nach innen folgenden Einfassung mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass in die erste (äusserste) Einfassung die $r(n - 1) = 2rm$ Zahlen $1, 2, \ldots rm$ und ihre Ergänzungen zu $p + 1$, in die zweite Einfassung die $r(n - 3) = 2r(m - 1)$ Zahlen $rm + 1, rm + 2, \ldots r(3m - 2)$ und ihre Ergänzungen zu $p + 1$, in die dritte

Einfassung die $r(n-5)=2r(m-2)$ Zahlen $r(3m-2)+1$, $r(3m-2)+2$, ... $r(5m-6)$ und ihre Ergänzungen zu $p+1$ u. s. w. eintreten, was zur Folge hat, dass die Seitensumme der ersten Einfassung gleich $\frac{1}{2}n(p+1)$, die der zweiten Einfassung gleich $\frac{1}{2}(n-2)(p+1)$, die der dritten gleich $\frac{1}{2}(n-4)(p+1)$ u. s. w. wird. So erfordert z. B. das symmetrische Sechseck für $r=6$, $n=7=2.3+1$ die $p=6.3.4+1=73$ Zahlen 1, 2, ... 73, wovon in die erste Einfassung die 36 Zahlen 1, 2, ... 18 mit ihren Ergänzungen zu 74, in die zweite Einfassung die 24 Zahlen 19, 20, ... 30 mit ihren Ergänzungen zu 74, in die dritte Einfassung die 12 Zahlen 31, ... 36 mit ihren Ergänzungen zu 74 und in den Mittelpunkt die Zahl 37 eintritt, indem die erste, zweite, dritte, vierte Einfassung resp. die Seitensumme 259, 185, 111, 37 erhält.

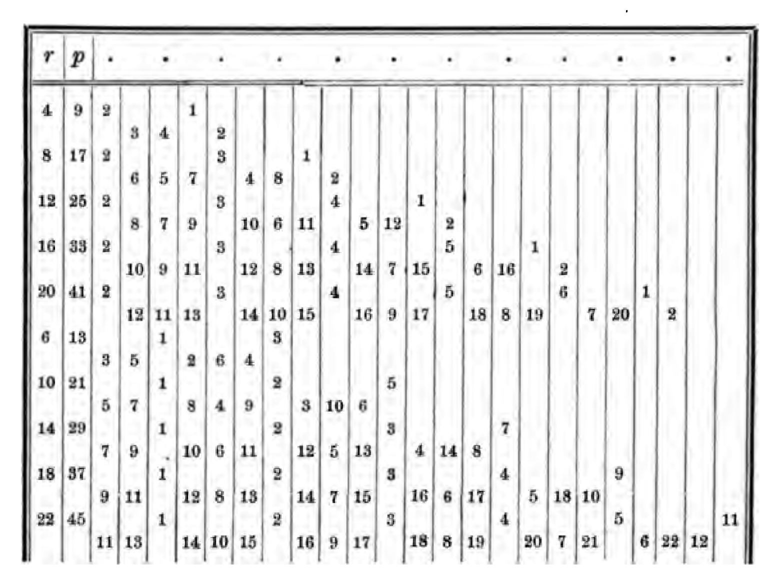
Die Vertheilung der Zahlen in jeder Einfassung geschieht nach folgendem allgemeinen Gesetze. Wir nehmen an, dass in einer r-eckigen Einfassung, deren Seite $n=2m+1$ Felder enthält, $2rm$ Zahlen, und zwar die Zahlen 1, 2, ... rm und deren Ergänzungen zu $p+1$ unterzubringen seien. Da die Ergänzung einer Zahl, wenn diese Zahl eine Eckzahl ist, ihr diametral gegenüber, und wenn sie eine Zwischenzahl ist, ihr direkt gegenüber zu stellen ist; so beschäftigen wir uns lediglich mit der Unterbringung der Zahlen 1, 2, ... rm.

Verlangt man, dass in dem r-ecke die Hälfte der unmittelbar aufeinander folgenden Ecken besetzt werden; so erhält man für das Viereck, Sechseck, Achteck und Zehneck, jenachdem $m=3$, 5, 7, 9 ist, die in nachstehender Tabelle zusammengestellte Gruppirung, wobei wir zur leichteren Kontrole für jeden Werth von m die Zahlen, welche den ersten $\frac{1}{2}r$ Seiten angehören, in die obere Linie, die Zahlen aber, welche den gegenüberliegenden Seiten angehören, in die untere Linie gesetzt und für die Eckzahlen besondere Spalten gebildet haben, in denen die obere und die untere Zahl zwei diametral gegenüberliegenden Ecken angehört.

r	n	rm	p											
4	3	4	9	2		4	3							
					1			2						
	5	8	25	3	6	7	8.5							
					1.2		4	3						
	7	12	49	4	8.9	10	11.12.7							
					1.2.3		6.5	4						
	9	16	81	5	10.11.12	13	14.15.16.9							
					1.2.3.4		8.7.6	5						
6	3	6	13	3		5		4	6					
					1		2			3				
	5	12	37	5	8	9	10	7	11.12					
					1.2		3.4		6	5				
	7	18	73	7	11.12	13	14.15	10	16.17.18					
					1.2.3		4.5.6		9.8	7				
	9	24	121	9	14.15.16	17	18.19.20	13	21.22.23.24					
					1.2.3.4		5.6.7.8		12.11.10	9				
8	3	8	17	5		7		4		6	8			
					3		2		1			5		
	5	16	49	9	14	13	12	7	10	11	15.16			
					5.6		3.4		1.2		8	9		
	7	24	97	13	20.21	19	17.18	10	14.15	16	22.23.24			
					7.8.9		4.5.6		1.2.3		11.12	13		
	9	32	161	17	26.27.28	25	22.23.24	13	18.19.20	21	29.30.31.32			
					9.10.11.12		5.6.7.8		1.2.3.4		14.15.16	17		
10	3	10	21	8		6		7		5		10	9	
					3		2		1		4			8
	5	20	61	15	16	11	14	13	12	9	18	19	17.20	
					5.6		3.4		1.2		7.8		10	15
	7	30	121	22	23.24	16	20.21	19	17.18	13	26.27	28	25.29.30	
					7.8.9		4.5.6		1.2.3		10.11.12		14.15	22
	9	40	201	29	30.31.32	21	26.27.28	25	22.23.24	17	34.35.36	37	33.38.39.40	
					9.10.11.12		5.6.7.8		1.2.3.4		13.14.15.16		18.19.20	29

47. Die vorstehende Tabelle kann für die darin berücksichtigten Polygone leicht für alle höheren Werthe von n fortgesetzt werden. Was aber die Erweiterung auf höhere Werthe von r betrifft; so kann das allgemeine Gesetz keineswegs aus den Spezialgesetzen für das Vier-, Sechs-, Acht- und Zehneck abstrahirt werden, da dieses Gesetz mit jedem dieser vier Spezialwerthe von r seinen Charakter ändert. Wir wollen auch dieses Gesetz, da es für höhere Werthe von r seine Einfachheit verliert, auf sich beruhen lassen und uns dem Gesetze zuwenden, welches sich unter der Voraussetzung ergiebt, dass a b w e c h s e l n d e i n e E c k e u m d i e a n d e r e mit einer der Zahlen $1, 2, \dots rm$ besetzt werden soll.

Zu diesem Ende unterscheiden wir den Fall, wo r das Doppelte einer **geraden** Zahl ist, von dem Falle, wo r das Doppelte einer **ungeraden** Zahl ist. Im ersten Falle besetzen wir **zwei benachbarte** Ecken und lassen dann erst den Wechsel eintreten; im zweiten Falle führen wir den Wechsel **von Anfang** an durch. Dieser Konstruktion entspricht ein **einfaches und allgemeines** Gesetz. Dasselbe lässt sich leicht in Formeln kleiden; wir ziehen jedoch vor, dasselbe in nachstehender Tabelle darzustellen, in welcher wir für die Spezialwerthe $r = 4, 8, 12, 16, 20$ und $r = 6, 10, 14, 18, 22$ eine Einfassung mit $n = 3$ Stellen in jeder Seite, wofür $p = 2r + 1$ und $mr = r$ wird, veranschaulichen, indem wir die Ecken durch Punkte kennzeichnen.



r	p	.		.		.		.		.		.		.		.		.		.		.		.
4	9	2			1																			
			3	4		2																		
8	17	2				3			1															
			6	5	7		4	8		2														
12	25	2				3				4			1											
			8	7	9		10	6	11		5	12		2										
16	33	2				3				4				5			1							
			10	9	11		12	8	13		14	7	15		6	16		2						
20	41	2				3				4				5				6			1			
			12	11	13		14	10	15		16	9	17		18	8	19		7	20		2		
6	13			1				3																
		3	5		2	6	4																	
10	21			1				2				5												
		5	7		8	4	9		3	10	6													
14	29			1				2				3				7								
		7	9		10	6	11		12	5	13		4	14	8									
18	37			1				2				3				4				9				
		9	11		12	8	13		14	7	15		16	6	17		5	18	10					
22	45			1				2				3				4				5				11
		11	13		14	10	15		16	9	17		18	8	19		20	7	21		6	22	12	

Für das Viereck stimmt dieses Gesetz mit dem aus Nr. 45 überein, weil hierfür auch die Voraussetzung dieselbe ist.

Man erkennt leicht den allgemeinen Typus des Gesetzes der ersten und der zweiten dieser beiden Klassen von Polygonen: es handelt sich nur noch um die Vervollständigung desselben für höhere Werthe von n. Wir wollen dieselbe

sogleich allgemein für irgend einen Werth von r und irgend einen Werth von $n = 2m + 1$ darstellen. Die vorstehende Tabelle zeigt das Gesetz für irgend ein r und den speziellen Werth $n = 3$ oder $m = 1$ als eine bestimmte Gruppirung der r Zahlen 1, 2, ... r. In dieser Gruppe übertreffen die in einer Seite liegenden Zahlen die der gegenüberliegenden Seite um den Betrag $r + 1$. Stellen wir jetzt dieselbe Gruppe mittelst der r Zahlen $1, 1 + m, 1 + 2m, \dots 1 + (r-1)m$ dar; so wird der Unterschied der Zahlensumme zweier gegenüberliegenden Seiten gleich $1 + rm$ sein. Dieser Unterschied soll aber $\frac{1}{2}(p+1) = \frac{1}{2} rm(m+1) + 1$ werden, derselbe muss also um $\frac{1}{2} rm(m-1)$ gesteigert werden. Diess geschieht dadurch, dass wir jeder Polygonseite aus den noch disponibelen Zahlen der Reihe 1, 2, ... rm noch $m - 1$ Zahlen, welche in zwei gegenüberliegenden Seiten die Differenz $\frac{1}{2} rm(m-1)$ erzeugen, hinzufügen. Diese Zahlen sind für je zwei gegenüberliegende Seiten, wenn wir zur Abkürzung $\frac{1}{2} rm = m'$ setzen, folgende

$3, \dots m$	$m+2, \quad m+3, \dots 2m$	$2m+2, \quad 2m+3, \dots 3m$	
$2, m'+3, \dots m'+m$	$m'+m+2, m'+m+3, \dots m'+2m$	$m'+2m+2, m'+2m+3, \dots m'+3m$	etc.

Um z. B. das Gesetz des Sechseckes für $n = 9 = 2 . 4 + 1$, also $m = 4$ zu vervollständigen, schreiben wir zunächst aus den 6 Zahlen 1, 5, 9, 13, 17, 21 die Gruppe

*		1		*		9
9	17	*	5	21	13	*

worin wir die offenen Ecken durch einen Stern angedeutet haben. Der Unterschied der Zahlen in zwei gegenüberliegenden Seiten ist hier gleich 25, muss aber gleizh 61 werden, ist also um 36 zu erhöhen. Diess geschieht durch Hinzufügung der Zahlen

2 3 4	6 7 8	10 11 12
14 15 16	18 19 20	22 23 24

und hierdurch ergiebt sich die Gruppe

*	2.3.4	1	6.7.8	*	10.11.12	9
9	14.15.16.17	*	5.18.19.20	21	22.23.24 13	*

In der nachstehenden Übersicht haben wir für das Sechseck die Zahlengruppen für $n = 3, 5, 7, 9$ zusammengestellt.

n	p							
3	13			1				3
		3	5		2	6	4	
5	37		2	1	4		6	5
		5	8.9		3.10	11	12.7	
7	73		2.3	1	5.6		10	7
		7	11.12.13		14.15	16	17.18	
9	121		2.3.4	1	6.7.8		10.11.12	9
		9	14.15.16.17		5.18.19.20	21	22.23.24.13	

Ein hiernach aus $p = 73$ Zahlen für $n = 7$ konstruirtes symmetrisches Sechseck ist folgendes

1 5 6 70 60 59 58

63 8

62 19 53 46 22 45 9

61 20 24 64

2 48 31 42 38 49 57

3 47 39 40 44 56

67 51 41 37 33 23 7

66 50 34 35 54 11

65 25 36 32 43 26 12

10 30 27 13

17 29 21 28 52 55 72

18 71

16 69 68 4 14 15 73

In diesem Sechsecke enthält jede äussere Seite, jeder Eckdurchmesser und jeder Zwischendurchmesser die Summe $\frac{1}{2}.7.74 = 259$, während die Seiten und Durchmesser des unter der ersten Einfassung liegenden Sechseckes die Summe $\frac{1}{2}.5.74 = 185$ und die des darauf folgenden Sechseckes die

Summe $\frac{1}{2}.3.74 = 111$ haben. Jede auf einer Seite normal stehende Doppelstrecke hat für eine, zwei, drei Einfassungen resp. die Summe $1.74 = 74$, $2.74 = 148$, $3.74 = 222$.

48. Ist die Stellenzahl in jeder Seite des Polygons gerade, also $n = 2m$; so ist die gesammte Zahlenmenge $p = rm^2$. Zu den in die äusserste Einfassung zu stellenden $r(n-1) = 2s(n-1)$ Zahlen nehmen wir die $s(n-1)$ Zahlen 1, 2, ... $s(n-1)$ und ihre Ergänzungen zu $p+1$. Nach Nr. 25 disponiren wir über die ersteren $s(n-1)$ Zahlen so, dass in jede Polygonseite gleich viel, und zwar deren m zu stehen kommen und dass die in zwei gegenüberliegenden Seiten befindlichen Zahlen gleiche Summe bilden. Zu diesem Ende besetzen wir, wenn n das Doppelte einer geraden Zahl m ist, die Hälfte der Ecken, wie sie unmittelbar aufeinander folgen, mit je einer Zahl, die diametral gegenüberliegenden Ecken aber mit den betreffenden Ergänzungen zu $p+1$. Jene s Ecken begrenzen $s-1$ aufeinander folgende Seiten. In jede dieser Seiten setzen wir noch $m-2$ Zahlen auf Zwischenpunkte, sodass in jeder dieser Seiten m Zahlen stehen. In den diesen Seiten gegenüberliegenden Seiten bringen wir in Zwischenpunkten je m Zahlen unter. Endlich setzen wir in jede der beiden Seiten, welche an die erste und letzte der besetzten Ecken stossen, je $m-1$ Zahlen auf Zwischenstellen. Hierdurch kommen auf jede Seite m Zahlen (also mit den Ergänzungen, wie verlangt, $2m = n$ Zahlen) zu stehen, und wenn man die einer jeden Zwischenzahl gerade gegenüberliegende Stelle mit der Ergänzung jener Zahl zu $p+1$ ausfüllt, wird die Seitensumme gleich $m(p+1) = \frac{1}{2}n(p+1)$.

Das Konstruktionsgesetz ist ein allgemeines, welches jedoch einen anderen Typus hat, jenachdem r das Doppelte einer geraden oder einer ungeraden Zahl ist. Indem wir zunächst nur die Gruppirung für eine Einfassung von $n = 4$ Stellen darstellen, ergiebt sich für die Werthe $r = 4$, 8, 12, 16, 20 und 6, 10, 14, 18, 22, indem jetzt $p = 4r$ und $s(n-1) = 3s$ ist, folgende Tafel, aus welcher das Bildungsgesetz leicht zu entnehmen ist.

r	p																				
4	16	3		2	6																
			4.1		5	3															
8	32	3		6		9		2	12												
			4.5		7.8		10.1		11	3											
12	48	3		6		9		12		15		2	18								
			4.5		7.8		10.11		13.14		16.1		17	3							
16	64	3		6		9		12		15		18		21		2	24				
			4.5		7.8		10.11		13.14		16.17		19.20		22.1		23	3			
20	80	3		6		9		12		15		18		21		24		27		2	30
			4.5		7.8		10.11		13.14		16.17		19.20		22.23		25.26		28.1		29	3
6	24	3		9		1	6														
			5.7		8.2		4	3													
10	40	3		6		9		15		1	12										
			4.5		7.8		11.13		14.2		10	3									
14	56	3		6		9		12		15		21		1	18						
			4.5		7.8		10.11		13.14		17.19		20.2		16	3					
18	72	3		6		9		12		15		18		21		27		1	24		
			4.5		7.8		10.11		13.14		16.17		19.20		23.25		26.2		22	3	
22	88	3		6		9		12		15		18		21		24	.	27		33		1
			4.5		7.8		10.11		13.14		16.17		19.20		22.23		25.26		29.31		32.2	

49. Wenn n das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, besetzen wir nicht s aufeinander folgende, sondern in den Polygonen, wo r das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, abwechselnd eine Ecke um die andere und in den Polygonen, wo r das Doppelte einer geraden Zahl ist, zwei benachbarte Ecken und sodann abwechselnd die eine um die andere mit Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots s(n-1)$. Wir stellen zunächst die Tafel für $n=6$ für die Werthe $r=4$, 8, 12, 16, 20 und 6, 10, 14, 18, 22, wobei $p=9r$ und $s(n-1)=5s$ ist, auf.

r	p																				
4	36		3.4.5		6.10	1															
		1	9	2	7.8																
8	72		5.6.7		8.17	3	11.12		18.19	1											
		1	15	2	10.16		9.13	4	14.20												
12	108		7.8.9		11.25	3	12.26		16.20	5	17.18		28.29	1							
		1	21	2	10.27		13.24	4	14.23		15.19	6	22.30								
16	144		9.10.11		13.35	3	14.36		16.33	5	20.29		19.28	7	23.24		38.39	1			
		1	27	2	12.37		15.34	4	18.32		17.31	6	12.26		21.25	8	30.40				
20	180		11.12.13		15.45	3	16.46		19.41	5	20.42		23.37	7	26.35		25.34	9	29.30		48.49
			33	2	14.47		17.44	4	18.43		21.40	6	22.39		24.36	8	28.32		27.31	10	38.50
6	54	1	6.11		5.9	3	10.15														
			4.12	2	7.8		13.14	1													
10	90	1	6.22		9.19	3	10.17		13.14	5	18.25										
			7.20	2	8.21		11.15	4	12.16		23.24	1									
14	126	1	8.32		11.29	3	14.27		13.25	5	16.23		19.20	7	26.35						
			9.30	2	10.31		12.28	4	15.24		17.21	6	18.22		33.34	1					
18	162	1	10.42		13.39	3	14.38		17.35	5	18.33		21.30	7	22.29		25.26	9	34.45		
			11.40	2	12.41		15.36	4	16.37		19.31	6	20.32		23.27	8	24.28		43.44	1	
22	198	1	12.52		15.49	3	16.48		19.45	5	22.43		21.41	7	24.39		27.36	9	28.35		31.32
			13.50	2	14.51		17.46	4	18.47		20.44	6	23.40		25.37	8	26.38		29.33	10	30.34

Das Gesetz für $n = 6$ ist nicht so durchsichtig wie das für $n = 4$ und bedarf einer Erläuterung, welche wir folgendermaassen geben. Wenn r das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, treten bei einem Umgange um das Polygon abwechselnd in die Ecken und in die diametral entgegengesetzten Ecken die Zahlen $1, 2, \ldots s$. Die letzte und die ihr gegenüberliegende Seite nimmt die Zahlen

$$\begin{matrix} s & 4s-2 & 5s & * \\ * & 5s-2 & 5s-1 & 1 \end{matrix}$$

auf; durch diese beiden Seiten und die Ecken sind also von der Zahlenreihe $1, 2, \ldots s(n-1)$ am vorderen Ende die s Zahlen $1, 2, \ldots s$, am hinteren Ende die drei Zahlen $5s$, $5s-1$, $5s-2$ abgeschnitten und mitten heraus die Zahl $4s-2$ genommen, sodass eine zusammenhängende Zahlenreihe $s+1$, $s+2, \ldots 5s-3$ mit der Lücke an der Stelle der Zahl $4s-2$ noch zur Disposition steht. Aus dieser Reihe nehmen wir immer je zwei Zahlenpaare, deren Summen sich um die Differenz 1 unterscheiden und deren Vorderglieder so nahe wie möglich am Anfange der Reihe liegen, während die Hinterglieder so nahe wie möglich am Ende der Reihe liegen: mit dem einen dieser beiden Paare besetzen wir eine Seite des Polygons und mit den anderen die gegenüberliegende Seite. So kann man als erstes, zweites, drittes, viertes ... Doppelpaar die Zahlen

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} s+1 & 5s-3 & s+3 & 5s-4 & s+5 & 5s-7 & s+7 & 5s-8 \\ s+2 & 5s-5 & s+4 & 5s-6 & s+6 & 5s-9 & s+8 & 5s-10 \end{array}$$

oder auch die Zahlen

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} s+1 & 5s-3 & s+2 & 5s-5 & s+5 & 5s-7 & s+6 & 5s-9 \\ s+3 & 5s-4 & s+4 & 5s-6 & s+7 & 5s-8 & s+8 & 5s-10 \end{array}$$

nehmen, d. h. man kann dafür sorgen, dass immer durch je vier Paare vorn und hinten vier unmittelbar aufeinander folgende Zahlen von der zur Disposition stehenden Reihe abgetrennt werden. Nach je vier Paaren kann man nach Belieben die durch diese beiden Schemas dargestellte Ordnung verwechseln.

Sobald man vor der Lücke $4s-2$ anlangt, entscheidet die Stellung dieser Lücke, wie dieselbe durch das vorstehende Verfahren zu überspringen ist, um die zur Disposition stehende Zahlenreihe von beiden Enden her allmählich zu absorbiren.

Jenachdem die Anzahl der zwischen $4s-2$ und $5s-2$ liegenden Stellen die Form $4x$, $4x+1$, $4x+2$ oder $4x+3$ hat, operirt man folgendermaassen. Sind $4x$ Stellen vorhanden; so erschöpfen sich dieselben durch die Hinterglieder von x Doppelpaaren und es bleibt vor der Lücke $4s-2$ eine zusammenhängende Zahlenreihe von $4y$ Gliedern stehen, mit welcher in obiger Weise verfahren wird. Sind $4x+1$, oder $4x+2$ oder $4x+3$ Stellen vorhanden; so bleiben nach Abscheidung der Hinterglieder jener x Doppelpaare vor der gedachten Lücke resp. 1 oder 2 oder 3 Zahlen stehen. Bezeichnen wir symbolisch die Lücke der Zahl $4s-2$ mit 0 und die 4 Zahlen des nun folgenden ersten, zweiten, dritten Doppelpaares resp. mit 1, 2, 3; so ist das in diesen drei Fällen einzuschlagende Verfahren dargestellt durch die erste, zweite, dritte der nachstehenden Zeilen, welche eine zusammenhängende Zahlenreihe von $4y$ Gliedern bildet, die nach obiger Regel zu erschöpfen ist.

$$\begin{array}{l} 1\,1 \ldots\ldots\ldots\ldots 1\,0\,1 \\ 1\,2\,1\,2 \ldots\ldots\ldots 2\,2\,0\,1\,1 \\ 1\,2\,1\,3\,2\,3 \ldots\ldots 3\,3\,2\,0\,2\,1\,1 \end{array}$$

Wenn r das Doppelte einer geraden Zahl ist, werden die Ecken abwechselnd mit den Zahlen 1, 2, ... s wie vorhin, jedoch mit dem Unterschiede besetzt, dass die eine Zahl 1 in die diagonal gegenüberliegende Ecke rückt. Alsdann wird die letzte und die ihr gegenüberliegende Seite wie vorhin mit den 4 Zahlen $4s-2$, $5s-2$, $5s-1$, $5s$ besetzt. Hierauf erhält die erste Seite die 3 Zahlen $s+1$, $s+2$, $s+3$ und die ihr gegenüberliegende Seite die eine Zahl $3(s+1)$, sodass diese beiden Seiten die Gruppe

$$\begin{array}{ccccc} * & s+1 & s+2 & s+3 & * \\ 1 & & 3s+3 & & 2 \end{array}$$

bilden. Endlich werden die übrigen Seiten mit je 2 Zahlen besetzt, von welchen die in irgend einer Seite und in der gegenüberliegenden Seite stehenden Paare sich wie früher um die Differenz 1 unterscheiden. Die Zahlenreihe, welche auf diese Weise in Doppelpaare aufzulösen ist, hat jetzt zwei Lücken, nämlich eine an der Stelle der Zahl $4s-2$ und eine an der Stelle der Zahl $3s+3$. Wie bei dem Abschneiden der Doppelpaare von den Enden her die erste Lücke übersprungen wird, so wird auch beim Fortgange der Operation die zweite überbrückt.

Wenn man für die Werthe von n, welche das Doppelte einer ungeraden Zahl sind, also zunächst für $n = 6$, nicht abwechselnd eine Ecke um die andere, sondern s aufeinander folgende Ecken mit Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots s(n-1)$ besetzen will; so ergiebt sich ein ganz anderes Gesetz, welches jedoch nicht die Einfachheit des vorstehenden hat. Wir führen nachstehend nur die betreffenden Gruppirungen für $r = 4, 6, 8, 12$ auf.

r	p													
4	36	4	10	1	5.9									
			2.6.7		3.8	4								
6	54	1	13	6	14	3	4.15							
			2.8.10		5.7.11		9.12	1						
8	72	4	17	7	18	10	19	1	2.20					
			3.12.13		5.16.14		6.9.15		8.11	4				
10	90	1	21	12	22	9	23	6	25	3	2.24			
			4.14.16		11.15.17		7.13.18		5.10.19		8.20	1		
12	108	1	25	4	26	7	27	10	28	13	29	16	2.20	
			3.6.21		5.9.23		8.14.22		12.15.24		11.17.30		18.19	1

50. In Nr. 48 haben wir das Bildungsgesetz für $n = 4$ und in Nr. 49 für $n = 6$ entwickelt. Hat nun n die allgemeine Form $4x + 4$; so leiten wir aus dem ersten Gesetze, und hat n die Form $4x+6$, so leiten wir aus dem zweiten Gesetze die Bildungsregel ab, indem wir aus den Zahlen $1, 2, \ldots s(n-1)$, welche über die in jener Gruppe verbrauchten Zahlen hinausragen, also resp. aus den $4sx$ Zahlen $3s+1$, $3s+2, \ldots s(n-1)$ oder aus den $4sx$ Zahlen $5s+1$, $5s+2, \ldots s(n-1)$ im Ganzen $2sx = rx$ Paare von gleicher Summe bilden und jeder Polygonseite ein solches Paar hinzufügen.

So erhält man z. B. für das Sechseck, wenn $n=4$, 6, 8, 10 genommen wird, bei Zugrundelegung des für $n=4$ in Nr. 48 und des für $n=6$ in Nr. 49 auf S. 82 gegebenen Gesetzes

n	p							
4	24	3		9		1	6	
			5.7		8.2		4	3
6	54	1	6.11		5.9	3	10.15	
			4.12	2	7.8		13.14	1
8	96	3	10.21	9	11.20	1	6.12.19	
			5.7.13.18		8.2.14.17		4.15.16	3
10	150	3	6.11.16.27		5.9.17.26	3	10.15.18.25	
			4.12.19.24	2	7.8.20.23		13.14.21.22	1

Wie man die zweite, dritte, vierte ... Einfassung eines magischen Polygons nach dem Schema einer Einfassung mit der betreffenden Stellenzahl bahandelt, ist schon mehrmals erörtert. Der Kern kann für gerade Werthe von n keine magische Einfassung bilden; seine r Eckzahlen sind nur so zu stellen, dass die diametral einander gegenüberliegenden die Summe $p+1$ bilden.

Ein hiernach aus $p=96$ Zahlen gebildetes Sechseck für $n=8$ ist folgendes

3 10 21 92 90 84 79 9
91 11
85 22 27 32 64 72 74 20
78 66 26 89
4 61 39 56 54 45 30 95
15 35 55 53 68 83
16 34 40 46 50 59 69 80
96 73 60 49 48 37 24 1
86 71 44 47 51 42 31 6
77 67 38 57 36 12
8 29 52 41 43 58 62 19
2 28 63 93
14 23 70 65 33 25 75 82
17 81
88 87 76 5 7 13 18 94

Jede äussere Seite und jeder Eckdurchmesser dieses Sechseckes hat die Summe $\frac{1}{2}.8.97=388$, jeder Doppel-Zwischen-

durchmesser hat die doppelte Summe 776. Die Seiten und Eckdurchmesser der zweiten Einfassung haben die Summe $\frac{1}{2}.6.97=291$, die Doppel-Zwischendurchmesser die doppelte Summe 594. Die Seiten und Eckdurchmesser der dritten Einfassung haben die Summe $\frac{1}{2}.4.97=194$ und die Doppel-Zwischendurchmesser die doppelte Summe 398. Der Kern hat die Eckdurchmesser $\frac{1}{2}.2.97=97$ und die Doppel-Zwischendurchmesser $2.97=194$.

Wir machen darauf aufmerksam, dass in dem Quadrate die auf einer Seite normal stehenden Abstände der Nachbarseiten parallel sind, dass also die Regeln für das symmetrische magische Quadrat mit den in Nr. 24 bis 28 behandelten Regeln für das Quadrat mit magischen Einfassungen übereinstimmen.

51. Eine besondere Regelmässigkeit nehmen die magischen Polygone von gerader Seitenzahl r an, wenn man die Zwischenzahlen, welche paarweise die Summe $p+1$ bilden, nicht einander direkt gegenüber, sondern, wie die Eckzahlen, diametral gegenüber setzt. In einem solchen diametral geordneten Polygone zeigt jedweder durch den Mittelpunkt gehende, aus zwei symmetrischen Hälften bestehende gerade oder beliebig gebrochene Zug von t Zahlen die Summe $\frac{1}{2}t(p+1)$. Ordnet man z. B. das letzte Sechseck diametral; so erhält man die nachstehende Figur

```
                3 10 21 92 90 84 79 9
              91                     11
            85    22 27 32 64 72 74    20
          78    66                  26    89
        4    61    39 56 54 45    30    95
      15    35    55             53    68    83
    16    34    40    46 50    59    69    80
  96    73    60    49       48    37    24    1
    17    28    38    47 51    57    63    81
      14    29    44             42    62    82
        2    67    52 43 41 58    36    93
          8    71                  31    19
            77    23 25 33 65 70 75    12
              86                      6
                88 18 13 7 5 76 87 94
```

Hierin hat jeder durch den Mittelpunkt gehende symmetrische Zug von t Zahlen die Summe $\frac{1}{2} . 97 . t$. Wenn wie hier n eine gerade Zahl, der Mittelpunkt also leer ist, muss t stets gerade $= 2t'$, die Summe des fraglichen Zuges also gleich $t'(p+1) = 97 . t'$ sein. So hat z. B. jeder achtstellige Zug die der äusseren Seite entsprechende Summe 388. Ein solcher Zug ist unter vielen anderen der Zug $3 + 27 + 11 + 55 + 42 + 86 + 70 + 94 = 388$.

Für ein ungerades n ist der Mittelpunkt mit der Zahl $\frac{1}{2}(p+1)$ besetzt, t ist ungerade, aber $p+1$ gerade.

III. Der magische Würfel.

Würfel mit ungerader Stellenzahl.

52. Für einen ungeraden Werth von n lassen sich die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^3$ zu einem vollkommenen magischen Würfel $ABECFHGD$ (Fig. 14) ordnen, welcher folgende Eigenschaften hat.

Jede quadratische Schnittfläche, mag sie zu einer Seitenfläche parallel laufen oder in einer Diagonalfläche wie $AEHD$ oder $CBGF$ oder $CHGA$ u. s. w. liegen, bildet ein vollkommenes magisches Quadrat, in welchem die Gesammtsumme aller n^2 Zahlen gleich $\frac{1}{2} n^2 (n^3 + 1)$ ist. Auch zwei rechteckige Schnittflächen wie $KLL'K'$ und $MNN'M'$, welche mit einer Diagonalfläche wie $AEHD$ parallel laufen und die Gesammtgrösse der letzteren haben, enthalten n^2 Zahlen mit jener Summe. Demzufolge hat jede Reihe von n Zahlen, welche entweder einer Kante AB, AC, AD oder einer Diagonalen einer Seitenfläche wie AE, BC, AF, AG u. s. w. parallel läuft oder in einer Hauptdiagonalen wie AH, ED, BF, CG u. s. w. liegt, oder welche aus zwei zu einer

Diagonalen einer Seitenfläche parallel laufenden Strecken $K''L''$ und $M''N''$ in ein und derselben mit dieser Seitenfläche parallel laufenden Schnittfläche oder aus zwei zu einer Hauptdiagonalen parallel laufenden Strecken in derselben Haupt-Diagonalfläche besteht, die gleiche Summe $\frac{1}{2}n(n^3+1)$.

53. Zur Konstruktion eines vollkommenen magischen Würfels mit ungerader Stellenzahl n seien a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' neun positive oder negative ganze Zahlen, welche folgenden 40 Bedingungen entsprechen

1) eine jede muss relativ prim zu n sein,
2) eine jede der 18 Zahlen $a\mp a'$, $b\mp b'$, $c\mp c'$, $a\mp a''$, $b\mp b''$, $c\mp c''$, $a'\mp a''$, $b'\mp b''$, $c'\mp c''$ muss relativ prim zu n sein,
3) eine jede der 12 Zahlen $(a\mp a'\mp a'')$, $(b\mp b'\mp b'')$, $(c\mp c'\mp c'')$ muss relativ prim zu n sein,
4) die Zahl $N=a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)$ muss relativ prim zu n sein.

Unter diesen zu n primen Zahlen darf sich der Werth ± 1, aber nicht der Werth 0 befinden.

Bezeichnen resp. r_1, s_1, t_1, r'_1, s'_1, t'_1, r''_1, s''_1, t''_1 die kleinsten positiven Reste von a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' nach n; so bilde man in einer horizontalen Grundebene, mit der Eckzahl 1 anfangend, mittelst der Reste r_1, s_1, t_1, r'_1, s'_1, t'_1 das Zahlenquadrat, welches die beiden Schenkel

$$1+r_0+s_0n+t_0n^2 \quad 1+r_1+s_1n+t_1n^2 \quad 1+r_2+s_2n+t_2n^2 \text{ etc.}$$
$$1+r'_1+s'_1n+t'_1n^2$$
$$1+r'_2+s'_2n+t'_2n^2$$
$$\text{etc.}$$

hat. Aus dieser Ebene geht man mittelst der Reste r''_1, s''_1, t''_1 in die nächste, vertikal darunter liegende über, indem die durch die Zahl 1 gehende vertikale Kante die Reihe

$$1+r_0+s_0n+t_0n^2 \quad 1+r''_1+s''_1n+t''_1n^2 \quad 1+r''_2+s''_2n+t''_2n^2 \text{ etc.}$$

bildet.

Der hierdurch entstehende Zahlenwürfel ist ein vollkommener magischer, und zwar verleihen die einzelnen der obigen Bedingungen diesem Würfel folgende Eigenschaften. Die vierte Bedingung, dass N relativ prim zu n sei, sichert die Verschiedenheit aller n^3 Zahlen oder die Vollständigkeit des Würfels.

Die 9 ersten Bedingungen garantiren die Konstanz der Summe in den zu den Kanten des Würfels parallelen Reihen, und zwar bedingt die Primität

von	a, b, c	die	Summe	parallel	zur	Länge AB
„	a', b', c'	„	„	„	„	Breite AC
„	a'', b'', c''	„	„	„	„	Höhe AD

Die 18 zweiten Bedingungen gewährleisten die Konstanz der Summe in allen ganzen und getheilten Reihen, welche den Diagonalen der Seitenflächen parallel sind, und zwar bedingt die Primität

von	$(a+a'), (b+b'), (c+c')$	die	Summe	parallel	zu	AE
„	$(a-a'), (b-b'), (c-c')$	„	„	„	„	CB
„	$(a+a''), (b+b''), (c+c'')$	„	„	„	„	AG
„	$(a-a''), (b-b''), (c-c'')$	„	„	„	„	DB
„	$(a'+a''), (b'+b''), (c'+c'')$	„	„	„	„	AF
„	$(a'-a''), (b'-b''), (c'-c'')$	„	„	„	„	DC

Die 12 dritten Bedingungen sichern die Konstanz der Summe in allen ganzen und getheilten Reihen, welche den Hauptdiagonalen des Würfels parallel laufen, und zwar bedingt die Primität

von	$(a+a'+a''), (b+b'+b''), (c+c'+c'')$	die	Summe	parallel	zu	AH
„	$(a+a'-a''), (b+b'-b''), (c+c'-c'')$	„	„	„	„	DE
„	$(a-a'+a''), (b-b'+b''), (c-c'+c'')$	„	„	„	„	CG
„	$(a-a'-a''), (b-b'-b''), (c-c'-c'')$	„	„	„	„	FB

Wenn man einzelne dieser Bedingungen unerfüllt lässt, erhält man einen unvollkommenen magischen Würfel.

Verzichtet man auf die zuletzt genannten 30 Bedingungen, und erfüllt nur die zuerst genannten 10; so erhalten in dem magischen Würfel alle zu den Kanten parallelen Reihen, jedoch nicht die zu den Diagonalen parallelen Reihen dieselbe Summe. Setzt man die mittelste aller n^3 Zahlen, nämlich die Zahl $\frac{1}{2}(n^3+1)$, welche die Form des Quadrinoms

$$1+\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}.n+\frac{n-1}{2}n^2$$

hat, in den Mittelpunkt des Würfels; so hat jede durch diesen Mittelpunkt gehende Hauptdiagonale die Summe $\frac{1}{2}n(n^3+1)$. Erfüllt man also hierneben die ersten 10 Bedingungen; so hat in dem magischen Würfel jede mit einer Kante parallele Reihe, ausserdem aber auch jede einfache Diagonale dieselbe Summe; nur die Konstanz der Summe der getheilten diagonalen Reihen ist nicht garantirt.

54. Nehmen wir beispielsweise für $n=5$ die Werthe $a=1$, $b=1$, $c=1$, $a'=1$, $b'=1$, $c'=2$, $a''=1$, $b''=3$, $c''=4$; so wird $N=-2$. Von den 18 zweiten Bedingungen sind 7 nicht erfüllt, indem $a-a'=0$, $b-b'=0$, $a+a''=5$, $a-a''=0$, $b-b''=0$, $a'-a''=0$, $b'-b''=0$ ist, und von den 12 dritten Bedingungen sind 2 nicht erfüllt, indem $b+b'+b''=5$ und $c-c'-c''=-5$ ist. Es werden daher einige der diagonalen Reihen nicht die konstante Summe $\frac{1}{2}5(5^3+1)=315$ bilden: stellt man aber die mittelste Zahl $\frac{1}{2}(5^3+1)=63$ in den Mittelpunkt des Würfels; so werden doch alle Hauptdiagonalen diese Summe zeigen. Indem wir die letztere Voraussetzung machen, also $63=1+2+2.5+2.5^2$ in den Mittelpunkt des Würfels setzen, mithin das dritte horizontale Quadrat zuerst berechnen, um von demselben abwärts und aufwärts zu steigen, schreiben wir die Zahlen zunächst in der Form $1+r+sn+tn^2$, notiren aber der Kürze wegen nur die Koeffizienten 1, r, s, t durch unmittelbare Nebeneinanderstellung in der Form $1\,r\,s\,t$. Diess giebt folgende fünf horizontale quadratische Querschnitte

1123 1234 1340 1401 1012
1230 1341 1402 1013 1124
1342 1403 1014 1120 1231
1404 1010 1121 1232 1343
1011 1122 1233 1344 1400

1202 1313 1424 1040 1141
1314 1420 1031 1142 1203
1421 1032 1143 1204 1310
1033 1144 1200 1311 1422
1140 1201 1312 1423 1034

1331 1442 1003 1114 1220
1443 1004 1110 1221 1332
1000 1111 1222 1333 1444
1112 1223 1334 1440 1001
1224 1330 1441 1002 1113

1410 1021 1132 1243 1304
1022 1133 1244 1300 1411
1134 1240 1301 1412 1023
1241 1302 1413 1024 1130
1303 1414 1020 1131 1242

1044 1100 1211 1322 1433
1101 1212 1323 1434 1040
1213 1324 1430 1041 1102
1320 1431 1042 1103 1214
1432 1043 1104 1210 1321

Die Zahlen selbst sind folgende

87	118	24	30	56
18	49	55	81	112
74	80	106	12	43
105	6	37	68	99
31	62	93	124	5

53	84	115	16	47
109	15	41	72	78
40	66	97	103	9
91	122	3	34	65
22	28	59	90	116

44	75	76	107	13
100	101	7	38	69
1	32	63	94	125
57	88	119	25	26
113	19	50	51	82

10	36	67	98	104
61	92	123	4	35
117	23	29	60	86
48	54	85	111	17
79	110	11	52	73

121	2	33	64	95
27	58	89	120	21
83	114	20	46	52
14	45	71	77	108
70	86	102	8	39

In diesem Zahlenwürfel zeigt jede von links nach rechts, jede von vorn nach hinten, jede von oben nach unten und jede diagonal laufende Reihe die Summe 315.

Würfel mit gerader Stellenzahl von der Form $n = 4m$.

55. Wenn n gerade ist, kann die Bedingung, dass die 9 Zahlen a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' und auch die Zahl N relativ prim zu n seien, nicht erfüllt werden: denn wenn jene 9 Zahlen ungerade sind, ist N gerade. Für ein gerades n von der Form $n = 4m$ wird ein vollkommener magischer Würfel folgendermaassen hergestellt.

Der geometrische Würfel in Fig. 14 schliesst die n^3 kubischen Felder ein, deren Mittelpunkte die Örter der n^3 Zahlen sind. Die Mittelpunkte der sechs Seitenflächen dieses Würfels bilden die Ecken eines Oktaeders. Die Oberfläche dieses Oktaeders nimmt von jedem der n horizontalen magischen Quadrate, in welche der ganze magische Zahlenwürfel zerfällt, eine quadratische Reihe auf, deren Seiten sich in den von innen nach aussen aufeinander folgenden Schichten immer mehr verengen. Stellt Fig. 15 die Ebene des dem mittelsten Querschnitte des geometrischen Würfels zunächst liegenden horizontalen magischen Quadrates, Fig. 16 die Ebene des nächst folgenden u. s. w., endlich Fig. 18 die Ebene des letzten, also der untersten Fläche des Würfels zunächst liegenden horizontalen Quadrates dar, repräsentiren mithin die Figuren 15 bis 18 die unterhalb des mittelsten Querschnittes des Würfels liegenden $\frac{1}{2}n = 2m$ magischen Quadratflächen; so enthält die Seite der darin verzeichneten übereck stehenden Quadrate resp. $2m$, $2m-1$, $2m-2$, ... 3, 2, 1 Zahlen. Alle diese Seiten liegen in der eben erwähnten Oktaederfläche. Ergänzt man nun in jeder magischen Quadratfläche jede dieser vier Seiten, z. B. die Seite, welche $2m - r$ Zahlen enthält, durch eine parallele Linie, welche r Zahlen enthält, sodass beide $2m$ Zahlen enthalten; so hat man in jeder Fläche einen d i a g o n a l e n D o p p e l z u g von $8m = 2n$ Zahlen nach Nr. 10 verzeichnet, welcher aus einem übereck stehenden Quadrate und aus vier die Ecken der Figur abstumpfenden Linie besteht. Diese abstumpfenden Linien liegen in der Oberfläche eines zweiten, grösseren Oktaeders, dessen Seitenflächen denen des ersten parallel

sind, indem die in den Verlängerungen der Linien $P_1 Q_1$ und $R_1 S_1$ liegenden Ecken um die Entfernung $J_1 P_1$ über die Punkte P_1, R_1, Q_1, S_1 hinaus liegen.

Ebenso wie die horizontalen Schnitte in der unteren Hälfte des Würfels, werden auch die horizontalen Schnitte in der oberen Hälfte desselben, von innen nach aussen, mit diagonalen Linienzügen versehen.

Hierdurch ist also in jeder horizontalen magischen Schnittfläche ein diagonaler Doppelzug markirt, welcher $2n$ Zahlen enthält. Diese Züge bilden die Durchschnittslinien zweier Oktaederflächen, welche die Bedeutung einer magischen Oktaeder-Doppelfläche haben, mit den verschiedenen Horizontalebenen des Würfels. Schneidet man diese Fläche durch vertikale Ebenen, welche einmal parallel zu $ABGD$ und einmal parallel zu $ACFD$ sind; so erhält man in jeder vertikalen Ebene den korrespondirenden diagonalen Linienzug. Der Würfel würde hierdurch, von vorn gesehen, den in Fig. 19 dargestellten Anblick gewähren.

Nach Nr. 10 kommen in jedem magischen Quadrate, also zunächst in dem Quadrate $A_1 B_1 E_1 C_1$ (Fig. 15) $2m$ diagonale Doppelzüge in Betracht, wovon in der Figur nur ein einziger gezeichnet ist. Stellt man diese $2m$ Züge sämmtlich dar; so gehört jeder von ihnen einer besonderen magischen Oktaeder-Doppelfläche an. Die Durchschnitte dieser Fläche mit den verschiedenen Horizontalflächen bilden in jedem Schnitte wie Fig. 16, 17, 18 einen diagonalen Doppelzug, welcher von dem in der betreffenden Figur verzeichneten gleich weit nach innen oder aussen absteht.

Von diesen $2m$ oktaedrischen Flächen wählen wir die Hälfte nach Belieben aus und bezeichnen ihre Punkte in den Horizontalschnitten mit dem Buchstaben a, während wir die Punkte der übrigen Hälfte mit h bezeichnen. Zählt man nun die n^3 Zahlen in natürlicher Reihenfolge von der Ecke A des Würfels, indem man die Grundreihen von je n Gliedern in der Richtung AB bildet, darauf diese Reihen in der Richtung AC folgen lässt und endlich die hierdurch entstehenden Quadrate

1	2	3	$\dots n$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\dots 2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$\dots 3n$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	$\dots nn$

in der vertikalen Richtung AD unter einander setzt, sodass die Anfangsecke

des ersten	Horizontalschnittes	die	Zahl	1
„ zweiten	„	„	„	n^2+1
„ dritten	„	„	„	$2n^2+1$
. . . . .	. . . . .	. . .	. . .	. . . .
„ n-ten	„	„	„	$(n-1)n^2+1$

erhält; so sind in die mit a bezeichneten Punkte diejenigen Zahlen zu setzen, welche bei dieser Zählung in diese Punkte treffen. Hierauf ist die Zählung von 1 bis n^3 in der diagonal gegenüberliegenden Ecke H zu beginnen und in den direkt entgegengesetzten Richtungen HF, HG, HE zu vollführen. Setzt man sodann in die mit h bezeichneten Punkte die bei dieser Zählung in dieselben treffenden Zahlen; so ist ein vollkommener magischer Würfel vollendet.

So viel verschiedene diagonale Doppelzüge des Quadrates $A_1B_1E_1C_1$ zu einer Gruppe von $2m$ Zügen zusammengefasst werden können, so viel verschiedene Grundformen kann der vollkommene magische Würfel annehmen.

Es kömmt noch darauf an, die Vollkommenheit eines magischen Würfels von gerader Seitenzahl $n = 4m$ zu definiren. Dieselbe besteht in folgenden Eigenschaften.

1) Jeder mit einer Seitenfläche parallele Schnitt ist ein magisches Quadrat, jedoch kein vollkommenes, sondern ein solches, welches in allen zu seinen Seiten parallelen Linien dieselbe Summe $\frac{1}{2}n(n^3+1)$ bildet.
2) Jede Haupt-Diagonalfläche wie $AEHD$, $CBGF$ u. s. w. ist ein solches magisches Quadrat.
3) Jede Haupt-Diagonallinie wie AH, ED, CG, BF u. s. w. hat dieselbe Summe.
4) Jede oktaedrische Doppelfläche enthält $2n^2$ Zahlen mit der konstanten Summe $n^2(n^3+1)$ von zwei magi-

schen Quadraten; alle Seitenflächen einer solchen oktaedrischen Doppelfläche, in welchen sämmtliche zu einer Linie wie $P_1 R_1$ parallelen Linien liegen, also jede aus gegenüberliegenden Seitenflächen bestehende Hälfte einer oktaedrischen Doppelfläche enthält n^2 Zahlen mit der konstanten Summe $\frac{1}{2} n^2 (n^3 + 1)$ eines magischen Quadrates; das aus allen parallelen (einander diametral gegenüberliegenden) Seitenflächen bestehende Viertel einer oktaedrischen Doppelfläche enthält $\frac{1}{2} n^2$ Zahlen mit der konstanten Summe $\frac{1}{4} n^2 (n^3 + 1)$ eines halben magischen Quadrates.

56. Als Beispiel stellen wir den vollkommenen magischen Würfel für $n = 4$ dar, welcher die 64 Zahlen 1 bis 64 umfasst. Es kommen hierfür $2m = 2$ oktaedrische Doppelflächen in Betracht. Dieselben ergeben folgendes durch die Buchstaben a und h dargestelltes Schema der vier horizontalen Quadrate und sodann durch Einzählung aus den Ecken A und H die daneben stehenden Zahlenquadrate, von welchen jedes die Summe $\frac{1}{2} . 4^2 (4^3 + 1) = 520$ und in jeder Reihe die Summe $\frac{1}{2} . 4 (4^3 + 1) = 130$ bildet.

a	*h*	*h*	*a*	1	63	62	4
h	*a*	*a*	*h*	60	6	7	57
h	*a*	*a*	*h*	56	10	11	53
a	*h*	*h*	*a*	13	51	50	16
h	*a*	*a*	*h*	48	18	19	45
a	*h*	*h*	*a*	21	43	42	24
a	*h*	*h*	*a*	25	39	38	28
h	*a*	*a*	*h*	36	30	31	33
h	*a*	*a*	*h*	32	34	35	29
a	*h*	*h*	*a*	37	27	26	40
a	*h*	*h*	*a*	41	23	22	44
h	*a*	*a*	*h*	20	46	47	17
a	*h*	*h*	*a*	49	15	14	52
h	*a*	*a*	*h*	12	54	55	9
h	*a*	*a*	*h*	8	58	59	5
a	*h*	*h*	*a*	61	3	2	64

57. Zwei Oktaeder-Doppelflächen, welche, wie die vorstehenden, aus zwei einander diametral gegenüberliegenden Eckpunkten A und H eingezählt sind, nennen wir einen Zwilling und bezeichnen ihn symbolisch durch die Formel $a+h$. Die Oktaederflächen bilden symmetrische Ringflächen, und da eine jede von einer bestimmten Ecke aus vollständig eingezählt ist; so stellt $a+h$ einen Zwilling aus ganzen Ringflächen dar.

Offenbar sind die Formeln für alle möglichen Zwillinge aus ganzen Ringflächen

$$a+h \quad b+f \quad c+g \quad d+e$$

Es kommen aber auch Zwillinge aus gehälfteten und geviertheilten Ringflächen in Betracht. Bei allen diesen treffen wir die für die Einzählung aller Ringflächen allgemein gültige Bestimmung, dass zwei einander gegenüber liegende Theile einer Ringfläche stets aus derselben Ecke eingezählt werden sollen. Hiernach bedarf es nur der Angabe der Art und Weise, wie die über dem mittelsten horizontalen Querschnitte des Würfels liegenden Theile einer Ringfläche einzuzählen sind, indem hieraus die Einzählung der unter jenem Querschnitte liegenden Theile von selbst hervorgeht. Die Hälftung und Viertheilung der Ringflächen bezieht sich hiernach auf den über oder unter dem mittelsten Querschnitte des Würfels liegenden Theil.

Hiernach und indem wir die fraglichen Gruppirungen nach dem in Nr. 16 erläuterten Prinzipe bezeichnen, sind die Formeln der verschiedenen möglichen Zwillinge aus gehälfteten Ringflächen die folgenden

$$ac+gh \qquad bc+df$$
$$\begin{matrix}a\\b\end{matrix}+\begin{matrix}f\\h\end{matrix} \qquad \begin{matrix}c\\e\end{matrix}+\begin{matrix}d\\g\end{matrix}$$

Ausserdem giebt es Zwillinge aus geviertheilten Ringflächen, nämlich die folgenden

$$\begin{matrix}ad\\da\end{matrix}+\begin{matrix}eh\\he\end{matrix} \qquad \begin{matrix}bg\\gb\end{matrix}+\begin{matrix}cf\\fc\end{matrix}$$

Ein Zwilling stellt in jede horizontale, vertikale und hauptdiagonale Reihe des magischen Würfels 4 Zahlen, welche

die Summe $2(n^3+1)$ bilden. Beispielsweise wird für $n=4$ der zweite horizontale Querschnitt des magischen Würfels nach der ersten, dritten und fünften der letzten sechs Formeln

g	a	c	h	36	18	31	45
a	g	h	c	21	39	42	28
a	g	h	c	25	43	38	24
g	a	c	h	48	30	19	33
f	a	a	f	45	18	19	48
a	f	f	a	21	42	43	24
b	h	h	b	28	39	38	25
h	b	b	h	36	31	30	33
e	a	d	h	32	18	35	45
a	e	h	d	21	27	42	40
d	h	e	a	41	39	22	28
h	d	a	e	36	46	31	17

Indem man aus den $2m$ Ringflächen m Zwillinge bildet, kann man jeden Zwilling nach einer beliebigen Zwillingsformel einzählen.

Würfel mit gerader Stellenzahl von der Form $n=2(2m+1)$.

58. Wenn die Stellenzahl n in der Seite des Würfels das Doppelte einer ungeraden Zahl $2m+1$ ist; so stellt man die $2m+1$ oktaedrischen Ringflächen in beliebiger Weise zu Zwillingen und Drillingen zusammen, zählt die Zwillinge nach den in voriger Nummer gegebenen Formeln, die Drillinge aber nach irgend welchen der nachstehenden Formeln ein.

$$\begin{matrix} gb \\ bg \end{matrix} + fd + \begin{matrix} e \\ c \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} da \\ ad \end{matrix} + hg + \begin{matrix} c \\ e \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} fc \\ cf \end{matrix} + gh + \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} he \\ eh \end{matrix} + df + \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

Ein Drilling führt in jede horizontale, vertikale und hauptdiagonale Reihe des magischen Würfels 6 Zahlen ein, welche die Summe $3(n^3+1)$ bilden.

59. Für die Stellenzahl $n=6$ kömmt nur ein einziger Drilling in Betracht. Legt man für die zunächst über dem

Mittelpunkte des Würfels liegenden horizontalen Querschnitte die erste der vorstehenden Formeln zu Grunde; so ergiebt sich folgende Gruppirung mit der Seitensumme $\frac{1}{2}.6(6^3+1)=651$

g	*e*	*f*	*d*	*e*	*b*	186	35	213	184	32	1
e	*f*	*g*	*b*	*d*	*e*	30	206	190	9	191	25
f	*g*	*e*	*e*	*b*	*d*	199	197	22	21	14	198
f	*b*	*c*	*c*	*g*	*d*	193	23	15	16	200	204
c	*f*	*b*	*g*	*d*	*c*	7	188	28	207	209	12
b	*c*	*f*	*d*	*c*	*g*	36	2	183	214	5	211
e	*f*	*g*	*b*	*d*	*e*	72	176	148	39	149	67
f	*g*	*e*	*e*	*b*	*d*	169	155	64	63	44	156
g	*e*	*f*	*d*	*e*	*b*	162	59	165	160	56	49
b	*c*	*f*	*d*	*c*	*g*	60	50	159	166	53	163
f	*b*	*c*	*c*	*g*	*d*	151	65	45	46	170	174
c	*f*	*b*	*g*	*d*	*c*	37	146	70	177	179	42
f	*g*	*e*	*e*	*b*	*d*	139	113	106	105	74	114
g	*e*	*f*	*d*	*e*	*b*	120	101	135	118	98	79
e	*f*	*g*	*b*	*d*	*e*	96	128	124	87	125	91
c	*f*	*b*	*g*	*d*	*c*	85	122	94	129	131	90
b	*c*	*f*	*d*	*c*	*g*	102	80	117	136	83	133
f	*b*	*c*	*c*	*g*	*d*	109	107	75	76	140	144
d	*g*	*c*	*c*	*b*	*f*	73	77	141	142	110	108
g	*c*	*d*	*f*	*c*	*b*	84	134	81	100	137	115
c	*d*	*g*	*b*	*f*	*c*	127	86	88	123	95	132
e	*d*	*b*	*g*	*f*	*e*	126	92	130	93	29	121
b	*e*	*d*	*f*	*e*	*g*	138	119	99	82	116	97
d	*b*	*e*	*e*	*g*	*f*	103	143	112	111	104	78
c	*d*	*g*	*b*	*f*	*c*	175	38	40	147	71	180
d	*g*	*c*	*c*	*b*	*f*	43	47	171	172	152	66
g	*c*	*d*	*f*	*c*	*b*	54	164	51	58	167	157
b	*e*	*d*	*f*	*e*	*g*	168	161	57	52	158	55
d	*b*	*e*	*e*	*g*	*f*	61	173	154	153	62	48
e	*d*	*b*	*g*	*f*	*e*	150	68	178	69	41	145
g	*c*	*d*	*f*	*c*	*b*	6	212	3	34	215	181
c	*d*	*g*	*b*	*f*	*e*	205	8	10	189	29	210
d	*g*	*c*	*c*	*b*	*f*	13	17	201	202	194	24
d	*b*	*e*	*e*	*g*	*f*	19	203	196	195	20	18
e	*d*	*b*	*g*	*f*	*e*	192	26	208	27	11	187
b	*e*	*d*	*f*	*e*	*g*	216	185	33	4	182	31

Zu grösserer Deutlichkeit haben wir die Aussenseite dieses Würfels, in deren Mitte die Ecke A liegt, in Fig. 20 dargestellt.

60. Es leuchtet ein, dass wenn m das Doppelte einer geraden Zahl ist, die in Frage kommenden Ringflächen nicht ausschliesslich in Zwillinge zusammengestellt zu werden brauchen, sondern auch in Zwillinge und Drillinge oder auch, wenn es geht, in lauter Drillinge gruppirt werden können.

61. Man übersieht leicht, dass sich sowohl für gerade, als ungerade n das Konstruktionsgesetz des magischen Würfels in ähnlicher Weise, wie es in Nr. 19 bis 23 mit dem magischen Quadrate geschehen, auf ein dreiaxiges Koordinatensystem zurückführen lässt, ferner, dass sich nach den Prinzipien der Nr. 24 bis 28 Würfel mit magischen Einfassungsflächen sowie geschichtete Würfel (Nr. 42) bilden lassen.

62. Schliesslich machen wir darauf aufmerksam, dass sich die Theorie der magischen Figuren nach Analogie der Nr. 29 ff. auf die Konstruktion magischer Raumpolygone und magischer Polyeder ausdehnen lässt.

IV. Anwendungen.

63. Die magischen Quadrate gestatten mancherlei Anwendungen; ich erlaube mir, zunächst einige auf solche Quadrate hinauslaufenden praktischen Aufgaben vorzuführen.

Sechs Personen würfeln gleichzeitig, eine jede mit zwei Würfeln, die durch rothe und schwarze Augen unterschieden sind, und die Würfel werden sechsmal gemeinschaftlich geworfen. Es wird erwartet, dass alle 36 Würfe verschieden seien, dass aber doch jeder gemeinschaftliche Wurf gleich viel Augen habe und dass auch jede einzelne Person in ihren sechs Würfen gleich viel Augen werfe: wie müssen die Würfe fallen? Offenbar stellt sich die Lösung in Form eines magi-

schen Quadrates oder vielmehr einer magischen Tafel von der Stellenzahl 6 dar, wie sie in Nr. 19 gegeben ist, wenn man unter den (um 1 zu erhöhenden) Abszissen 1, 2, 3, 4, 5, 6 die rothen Augen des einen und unter den (um 1 zu erhöhenden) Ordinaten 1, 2, 3, 4, 5, 6 die schwarzen Augen versteht.

64. Unter vier Regimenter sollen 40 Medaillen und 40 Kreuze vertheilt werden; jedes Regiment soll gleich viel Medaillen und und gleich viel Kreuze erhalten; es sollen aber auch die Mannschaften, die Unteroffiziere, die Offiziere und die Stabsoffiziere aus allen Regimentern gleich viel Medaillen und Kreuze erhalten, obwohl jede Charge in allen Regimentern in verschiedener Weise bedacht wird: wie muss die Vertheilung vorgenommen werden? Die magische Tafel von der Stellenzahl 4 mit den Abszissen und Ordinaten 1, 2, 3, 4 zeigt die Lösung.

65. Es ist eine Quantität Wein vom Inhalte A und eine Quantität Wasser vom Inhalte B gegeben. Der Wein soll mit einem dazu anzufertigenden Gefässe (immer in vollen Gefässfüllungen) geschöpft und an 10 Gesellschaften, wovon jede aus 10 Klassen besteht, abgegeben und in die dazu bereit stehenden 100 Flaschen gegossen werden. Dasselbe soll mit dem Wasser geschehen. Wie ist zu operiren, damit jede Flasche einen anderen Inhalt, dessenungeachtet aber nicht bloss jede Gesellschaft, sondern auch jede Klasse gleich viel Wein und gleich viel Wasser erhält? Wenn man den Wein und so auch das Wasser in jede Flasche durch mindestens einmaliges und höchstens durch zehnmaliges Schöpfen einfüllen will, muss der Inhalt des Gefässes für den Wein der 550-ste Theil von A und der des Gefässes für das Wasser der 550-ste Theil von B sein und die Füllungen mit diesen Gefässen in die Flaschen stellen sich als die Abszissen und Ordinaten 1, 2, 3, ... 10 einer magischen Tafel von der Stellenzahl 10 dar.

66. Offenbar kann man, ohne die Eigenschaften der magischen Tafel, welche durch die Kombinationen xy dar-

gestellt ist, zu ändern, alle Abszissen mit einer konstanten Grösse $p\alpha$ und alle Ordinaten mit einer konstanten Grösse $q\beta$ multipliziren und zu dem Werthe einer sochen Kombination eine konstante Grösse $r\gamma$ addiren, also den Werth der Kombination xy gleich $r\gamma + xp\alpha + ynq\beta$ setzen. Jede horizontale und vertikale Reihe hat dann die Summe

$$nr\gamma + \frac{n(n-1)}{2}p\alpha + \frac{n^2(n-1)}{2}q\beta$$

und das ganze Quadrat hat die Summe

$$n^2r\gamma + \frac{n^2(n-1)}{2}p\alpha + \frac{n^3(n-1)}{2}q\beta$$

Unter α, β, γ kann man die Benennungen verschiedenartiger Objekte verstehen, während p, q, r beliebige Zahlen sind. Durch die letzteren Formeln kann man also der zu vertheilenden Zahl und Art der Objekte eine grössere Mannichfaltigkeit verleihen.

67. Wenn man die Zahlen p, q, r ... den Buchstaben a, b, c ... als Zeiger zufügt, lehrt das magische Quadrat, wie man die n^2 Elemente a_1, a_2, ... a_n, ferner b_1, b_2, ... b_n, ferner c_1, c_2, ... c_n in n Gruppen von je n Elementen so zusammenstellen könne, dass in jeder Gruppe, sowie auch in allen ersten, allen zweiten, allen dritten ... Gliedern und endlich in den die Diagonale einnehmenden Gruppen alle Buchstaben und alle Zeiger vertreten sind. So hat man z. B. für $n = 5$ nach Nr. 19

$$\begin{matrix} a_1 & b_3 & c_5 & d_2 & e_4 \\ c_2 & d_4 & e_1 & a_3 & b_5 \\ e_3 & a_5 & b_2 & c_4 & d_1 \\ b_4 & c_1 & d_3 & e_5 & a_2 \\ d_5 & e_2 & a_4 & b_1 & c_3 \end{matrix}$$

Jene Auseinandersetzung lehrt zugleich, dass diese Aufgabe nur erfüllt werden kann, wenn n eine ungerade, nicht durch 3 theilbare Zahl ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann der Aufgabe zwar für alle horizontalen und vertikalen Reihen, nicht aber zugleich für beide Diagonalen

genügt werden. So können z. B. nicht 6 Chargen von 6 Regimentern so geordnet werden, dass in jeder horizontalen, vertikalen und diagonalen Gruppe jede Charge und jedes Regiment vertreten wäre. Auch mit 9 Regimentern ist es unmöglich.

68. Wenn man die Zeiger 1, 2, ... n in zweite Elemente verwandelt, lehrt das magische Quadrat, wie die aus den n Elementen a, b, c ... herstellbaren Kombinationen zu zwei Elementen mit Wiederholungen in Gruppen von je n Kombinationen dergestalt zu ordnen sind, dass in jeder horizontalen, vertikalen und diagonalen Reihe sowohl die ersten, als auch die zweiten Elemente eine Permutation von a, b, c ... bilden. So hat man z. B. für $n = 5$

$$\begin{array}{ccccc} aa & bc & ce & db & ed \\ cb & dd & ea & ac & be \\ ec & ae & bb & cd & da \\ bd & ca & dc & ee & ab \\ de & eb & ad & ba & cc \end{array}$$

Auch diese Aufgabe ist nur für einen ungeraden, durch 3 nicht theilbaren Werth von n erfüllbar; für andere Werthe sind die Diagonalen auszuschliessen.

69. Die Theorie des magischen Würfels lehrt die vorstehende Aufgabe für Kombinationen von 3 Elementen lösen und auf Biquadrate mit Kombinationen von 4 Elementen, auf fünfte Potenzen mit Kombinationen von 5 Elementen u. s. w. verallgemeinern.

70. Ein besonderes Interesse erlangen die Formeln aus Nr. 66, wenn man unter α die reelle und unter β imaginäre Einheit $\sqrt{-1} = i$ versteht. Alsdann nimmt die Kombination xy die Bedeutung der komplexen Zahl $x + yi$ an. Sind r, s die kleinsten positiven Reste der Zahlen a, b nach dem reellen Model n, also r und $s < n$; so ist $r + si$ der Rest der komplexen Zahl $a + bi$. Nimmt man alle ganzen komplexen Vielfachen der Zahl $a + bi$, also alle Produkte $(a + bi)(p + qi)$, worin sowohl p, als auch q alle möglichen

ganzen Werthe 0, 1, 2, ... annehmen können; so werden doch die kleinsten positiven Reste höchstens n^2 verschiedene Werthe annehmen können. Wenn der Model n zur Norm $a^2 + b^2$ relativ prim ist; so können keine zwei Produkte, in welchen p und $q \leqq n$ sind, gleiche Reste haben; die Anzahl der verschiedenen Reste wird also ihren höchsten Betrag n^2 erreichen.

Das magische Quadrat lehrt nun, dass sich die Reste der komplexen Vielfachen der komplexen Zahl $a + bi$ in verschiedener Weise in n Reihen von je n Gliedern ordnen lassen, welche sämmtlich die konstante Summe

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} i = c + ci$$

haben und deren erste Glieder, zweite Glieder, dritte Glieder u. s. w. ebenfalls diese Summe bilden.

Die geometrische Bedeutung der Zahl $x + yi$ ist der Vektor mit der Abszisse x und der Ordinate y. Denkt man sich in der Ebene der xy die Abszissenaxe, sowie die Ordinatenaxe in den Abständen einer Einheit, also in den Entfernungen 0, 1, 2, 3 ... abgetheilt, durch die Theilpunkte horizontale und vertikale Linien gezogen; so repräsentiren die Durchschnittspunkte alle möglichen ganzen komplexen Zahlen $x + yi$. Theilt man diese Zahlenebene in den Abständen 0, n, $2n$, $3n$ ... in Quadrate von der Seitenlänge n ab (Fig. 21); so erscheint der Rest des Vektors $OA = a + bi$ als die Linie $BA = r + si$, welche von dem Endpunkte A nach dem vorderen unteren Eckpunkte B des Quadrates, in welchem A liegt, gezogen wird. Dieser Rest entspricht der damit parallel gezogenen Linie $OC = r + si$ im ersten Quadrate.

Die Linie $c + ci$ hat die Richtung der Diagonalen eines Quadrates. Das magische Quadrat lehrt also, dass, wenn man in den danach geordneten Reihen der Reste fortschreitet, man auf diesem gebrochenen Wege $OD_1D_2D_3$ ... (Fig. 22) n-mal in gleichen Abständen $OD_1 = D_1D_2 = D_2D_3$ u. s. w. diese Diagonale passirt und schliesslich in derselben endigt,

auch dass das Nämliche geschieht, wenn man die Reste so ordnet, dass alle ersten, alle zweiten, alle dritten ... Reste jener Reihen hintereinander durchlaufen werden.

71. Angenommen, n^2 Kräfte seien durch die Linien Oa_1, Oa_2, ... Oa_n, ferner Ob_1, Ob_2, ... Ob_n, ferner Oc_1, Oc_2, ... Oc_n u. s. w. in Fig. 23 bestimmt, welche von einem Punkte O nach den n^2 Durchschnittspunkten zweier Systeme von je n Parallelen gezogen sind (die Parallelen können beliebige und verschiedene Abstände haben). Diese Kräfte sollen in Gruppen von je n Komponenten so zusammengestellt werden, dass jede Gruppe dieselbe Resultante hat und dass auch die ersten, die zweiten, die dritten ... Komponenten aller Gruppen für sich diese Resultante haben.

Wenn man die zu $a_1 c_1$ und zu $a_3 a_1$ durch den Punkt O gelegte Parallele OX und OY zur Abszissen- und Ordinatenaxe eines schiefwinkligen Koordinatensystems annimmt, haben je n Kräfte dieselbe Abszisse und je n dieselbe Ordinate: es kömmt also nur darauf an, diese Kräfte nach einem magischen Quadrate zusammenzustellen, was für jeden Werth von n möglich ist, wenn die Resultante der die Diagonalen einnehmenden Kräfte nicht weiter in Betracht gezogen werden.

72. Es wird beabsichtigt, von der gleichmässig sich neigenden Terrainlinie $a_1 a_9$ (Fig. 24) in gleichen Abständen 9 Bohrlöcher auf die gleichmässig abfallende Gebirgsschicht $b_1 b_9$ hinabzutreiben. Als Unternehmer kommen Deutsche, Franzosen und Italiener in Betracht und zwar von jeder Nation Bergleute, Brunnenmacher und Bauunternehmer. Man wünscht die Bohrlöcher so zu vertheilen, dass von den Angehörigen jeder Nation und auch von jeder Art von Technikern eine gleiche Tiefe durchbohrt wird: wie sind die Bohrlöcher zu vergeben? Da die Tiefe der einzelnen Löcher a_1, a_2, ... a_9 in arithmetischer Progression zunimmt; so lös't nachstehendes magisches Quadrat die Aufgabe

$$\begin{matrix} a_4 & a_9 & a_2 \\ a_3 & a_5 & a_7 \\ a_8 & a_1 & a_6 \end{matrix}$$

73. Der kreisförmige Weg und die tägliche Arbeit, welche ein Pferd an einem Göpel verrichtet, ist der Entfernung seines Angriffspunktes von der Axe proportional. Zur gemeinschaftlichen Betreibung eines Göpelwerkes stehen 6 Pferde zur Verfügung: a) ein schwarzer Trakehner Hengst, b) eine braune Trakehner Stute, c) ein Trakehner Schimmel, d) ein Neustädter Schimmelwallach, e) ein Harzburger Schimmelhengst, f) ein Neustädter Fuchshengst: wie sind diese Thiere in den mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 numerirten Plätzen des Göpelarmes anzuspannen, sodass alle Trakehner, alle Schimmel und alle Hengste gleiche Arbeit verrichten?

Offenbar liegt der Fall der äussersten Einfassung eines geschichteten magischen Dreiecks nach Nr. 42 vor. Die Pferde a, b, c, d, e, f sind resp. in den Punkten 1, 5, 3, 4, 2, 6 anzuspannen.

74. Die magische Linienfigur ist nach ihrer allgemeinen Bedeutung die Verknüpfung mehrerer Zahlenreihen von gegebener, gleicher oder verschiedener Gliederzahl, von denen irgend welche mit irgend welchen anderen ein, zwei, drei oder mehr Glieder miteinander gemein haben. Die in diesen Reihen unterzubringenden Zahlen, welche aus gleichen und beliebig verschiedenen bestehen können, sind gegeben; die magische Bedingung aber besteht darin, dass alle Reihen gleiche Summen darbieten.

Ein solcher Komplex von Reihen stellt eine eindimensionale Zahlengruppe dar. Durch Nebeneinanderlagerung solcher Gruppen nach magischen Seitenreihen entsteht eine magische Polygonfläche oder eine zweidimensionale Gruppe. Eine abermalige Nebeneinanderlagerung solcher Gruppen nach magischen Seitenreihen ergiebt magische Polyeder oder dreidimensionale Gruppen u. s. f.

Auf diese Weise wird die magische Figur der Ausdruck einer ganz besonderen Klasse von unbestimmten Aufgaben, bei welchen die Gemeinschaftlichkeit gewisser Glieder ein charakteristisches Merkmal bildet.

So ist z. B. in Fig. 25 die vierseitige magische Figur der Repräsentant des Gesetzes, wonach die 7 Grössen von

den Werthen 2, 2, 4, 5, 7, 9, 10 über eine Gesellschaft von Kaufleuten, Soldaten, Beamten und Künstlern, worin zwei Soldaten zugleich Kaufleute und Beamte, ein Soldat, ein Kaufmann und ein Beamter auch Künstler, ein Kaufmann und ein Beamter jedoch weder Soldat, noch Künstler ist, so vertheilt werden, dass alle Kaufleute, alle Soldaten, alle Beamten und alle Künstler gleich viel, nämlich 21, erhalten.

75. Ein Gegenstand von besonderem Interesse in den magischen Polygonen und Polyedern sind die in Nr. 8 und 10 erwähnten symmetrischen Figuren von konstantem Summenwerthe, sowie die in dieser Schrift vielfach nachgewiesenen regelmässigen Züge, in welchen sich die Zahlen mit konstanten Differenzen oder mit anderen einfach variabelen Eigenschaften aufstellen. Hierdurch bildet die Theorie der magischen Figuren einen nicht unwichtigen Beitrag zu den noch wenig entwickelten Relationen zwischen geometrischer Form und arithmetischer Anordnung.

Schliesslich heben wir hervor, dass die magischen Probleme oftmals mehrere Auflösungen zulassen, dass sie jedoch dessenungeachtet nicht zu den eigentlichen unbestimmten oder diophantischen Aufgaben gehören und nicht mit Gleichungen zu behandeln sind, da es sich nicht um die Auffindung unbekannter, sondern um die Anordnung bekannter Grössen nach gegebenen Bedingungen handelt. Die Theorie der magischen Figuren erscheint hiernach als ein Zweig der erweiterten Kombinationslehre.

V. Beweise.

Um die Darstellung einfacher und anschaulicher zu machen, erschien es mir nützlich, die Unterbrechungen durch Beweise zu vermeiden. Obgleich diese Beweise ohne grosse Mühe zu finden sind; so gestatte ich mir doch zur Erleichterung der Auffindung folgende Bemerkungen.

Zu Nr. 2. Wenn m die mittelste Zahl des nach S. 2 aufgestellten Zahlenquadrates ist; so hat irgend eine dieser

Zahlen den Werth $m+(xa+x'a')+(xb+x'b')n$ und irgend eine andere den Werth $m+(ya+y'a')+(yb+y'b')n$, worin x, x', y, y' beliebige positive oder negative ganze Zahlen $\leqq \frac{1}{2}(n-1)$ sind. Der Unterschied dieser beiden Zahlen ist

$$[(x-y)a+(x'-y')a']+[(x-y)b+(x'-y')b']n=X+Yn$$

Wenn und nur wenn X und Y ein Vielfaches von n, also $X=un$, $Y=vn$ ist, sind die den beiden vorstehenden Zahlen entsprechenden Zahlen des auf S. 3 durch die kleinsten positiven Reste dargestellten magischen Quadrates einander gleich. Diese Gleichheit fordert also, dass

$$x-y=\frac{ub'-va'}{ab'-a'b}\cdot n \quad \text{und} \quad x'-y'=\frac{va-ub}{ab'-a'b}\cdot n$$

ganze Zahlen kleiner als n seien. Diese Forderung ist unerfüllbar, das magische Quadrat enthält also lauter verschiedene, mithin sämmtliche Zahlen 1, 2, ... n^2, wenn $ab'-a'b$ relativ prim zu n ist.

Wenn und nur wenn a und b relativ prim zu n sind, enthalten die Reste r_0, r_1, ... r_{n-1} und auch die Reste s_0, s_1, ... s_{n-1} alle n Zahlen 0, 1, 2, ... $(n-1)$ und demgemäss hat jede horizontale Reihe des magischen Quadrates die konstante Summe. Wenn a' und b' relativ prim sind, hat jede vertikale Reihe, wenn $a+a'$ und $b+b'$ relativ prim zu n sind, die Diagonale AD, wenn $a-a'$ und $b-b'$ relativ prim zu n sind, die Diagonale BC diese Summe.

Der Satz Nr. 3 ergiebt sich aus der Summation der Progressionen, deren mittelstes Glied den Werth $\frac{1}{2}(n^2+1)$ hat.

Der Satz Nr. 4 geht theils aus Nr. 2 und 3, theils aus den Werthen der in eine diagonale Reihe wie *ef*, *gih* eintretenden Zahlen hervor.

Der Satz Nr. 5 ist evident.

Der Satz Nr. 6 lässt sich in ähnlicher Weise wie der Satz Nr. 2 beweisen.

Die Spezialisirungen in Nr. 7 bedürfen keines Beweises.

Die Sätze in Nr. 8 über die symmetrischen Figuren ergeben sich, wenn man die vier, resp. acht Zahlen, welche nach S. 10 den Grundbestandtheil jeder symmetrischen

Figur bilden, durch die obige allgemeine Formel ausdrückt und summirt, wobei sich die Unabhängigkeit der Summe von der speziellen Lage der betreffenden Punkte herausstellt.

Die Sätze Nr. 9 leuchten ein.

Die Sätze Nr. 10 sind, soweit sie nicht Definitionen enthalten, leicht aus den früheren darzuthun.

Die Sätze in Nr. 11, 13 und 16 stellen sich durch Summation der dort bezeichneten Zahlen, wenn sie durch die allgemeinen Formeln dargestellt werden, heraus. Die Sätze 12, 14, 15, 17 sind evidente Folgerungen aus den Sätzen 11, 13, 16.

Die Sätze in Nr. 18 über die Ringe ergeben sich wie die vorhergehenden Sätze über die Kreuze.

Die Sätze Nr. 19 bis 23 sind mit Hülfe der allgemeinen Formeln für die in das Quadrat eintretenden Zahlen unschwer zu konstatiren.

Nr. 24 enthält eine Erklärung.

Die Sätze in Nr. 25 gehen aus der Entwicklung hervor.

Die Sätze in Nr. 26, 27 und 28 verifiziren sich durch die Summation der aufgestellten Reihen.

Der Satz Nr. 29 ist leicht zu konstatiren.

Nr. 30 enthält eine Erklärung.

Der Satz Nr. 31 verifizirt sich durch die allgemeinen Formeln und Nr. 32 und 33 sind selbstverständliche Ausführungen desselben.

Die Sätze in Nr. 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 konstatiren sich durch die allgemeinen Formeln.

Nr. 44 ist eine Definition, welche in Nr. 45 ihre evidente Ausführung findet.

Die Sätze in Nr. 46, 47, 48, 49, 50 und 51 sind theils spezielle, theils generelle; die ersteren ergeben sich unmittelbar aus den aufgestellten speziellen Zahlenreihen, die letzteren aus den generellen Reihen und Gesetzen.

Nr. 52 enthält eine Erklärung.

Die Sätze in Nr. 53 sind durch folgende Betrachtung zu beweisen. Geht man von der mittelsten Zahl m des Würfels aus; so ist irgend eine andere Zahl

$$m+(xa+x'a'+x''a'')+(xb+x'b'+x''b'')n+(xc+x'c'+x''c'')n^2$$

wenn man auf die kleinsten positiven Reste nach n rekurrirt. Eine zweite Zahl ist

$$m+(ya+y'a'+y''a'')+(yb+y'b'+y''b'')n+(yc+y'c'+y''c'')n^2$$

worin x, x', x'', y, y', y'' beliebige positive oder negative ganze Zahlen $\leqq \frac{1}{2}(n-1)$ sind.

Die Differenz der beiden Zahlen ist

$$[(x-y)a+(x'-y')a'+(x''-y'')a'']+[(x-y)b+(x'-y')b'+(x''-y'')b'']n$$
$$+[(x-y)c+(x'-y')c'+(x''-y'')c'']n^2=X+Yn+Zn^2$$

Die Differenz der korrespondirenden Zahlen wird nur dann gleich null oder die beiden Zahlen einander gleich, wenn X, Y, Z Vielfache von n, also resp. gleich un, vn, wn, oder wenn

$$x-y=\frac{u(b'c''-b''c')+v(c'a''-c''a')+w(a'b''-a''b')}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}\cdot n$$

$$x'-y'=\frac{u(b''c-bc'')+v(c''a-ca'')+w(a''b-ab'')}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-ac'')+a''(bc'-b'c)}\cdot n$$

$$x''-y''=\frac{u(bc'-b'c)+v(ca'-c'a)+w(ab'-a'b)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)}\cdot n$$

ganze Zahlen kleiner als n werden. Diess ist unmöglich, wenn

$$N=a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)$$

einen zu n relativ primen oder auch den Einheitswerth (jedoch nicht den Nullwerth) hat. Sobald diese Bedingung erfüllt ist, enthält der Würfel lauter verschiedene, also sämmtliche Zahlen $1, 2, 3, \ldots n^3$.

Bezeichnet man mit MA, MB, MC drei von M auslaufende rechtwinklige Linien, welche den drei Kanten des Würfels parallel sind; so haben die Zahlen der Ebene MAB die Form

$$m+(xa+x'a')+(xb+x'b')n+(xc+x'c')n^2$$

die der Ebene MAC die Form

$$m+(xa+x''a'')+(xb+x''b'')n+(xc+x''c'')n^2$$

und die der Ebene MBC die Form

$$m+(x'a'+x''a'')+(x'b'+x''b'')n+(x'c'+x''c'')n^2$$

Die Linie MC würde in der Ebene MAB liegen, wenn

$$xa + x'a' = x''a'' \quad xb + x'b' = x''b'' \quad xc + x'c' = x''b''$$

also wenn

$$\frac{ab'' - a''b}{a''b' - a'b''} = \frac{ac'' - a''c}{a''c' - a'c''} = \frac{b''c - bc''}{b'c'' - b''c'}$$

d. h., wenn $N = 0$ wäre. Überhaupt ist $N = 0$ die Bedingung dafür, dass die drei Linien MA, MB, MC in eine Ebene fallen, ein Fall, welcher auszuschliessen ist, wenn der magische Würfel vollständig sein soll.

Die Zahlen der zu MA, MB, MC parallelen Reihen haben die Form

$$m + xa + xbn + xcn^2$$
$$m + xa' + xb'n + xc'n^2$$
$$m + xa'' + xb''n + xc''n^2$$

Die Zahlen der zu AE, CB, AG, DB, AF, DC parallelen Reihen haben die Form

$$m + x(a \mp a') + x(b \mp b')\,n + x(c \mp c')\,n^2$$
$$m + x(a \mp a'') + x(b \mp b'')\,n + x(c \mp c'')\,n^2$$
$$m + x(a' \mp a'') + x(b' \mp b'')\,n + x(c' \mp c'')\,n^2$$

Die Zahlen der zu AH, DE, CG, FB parallelen Reihen haben die Form

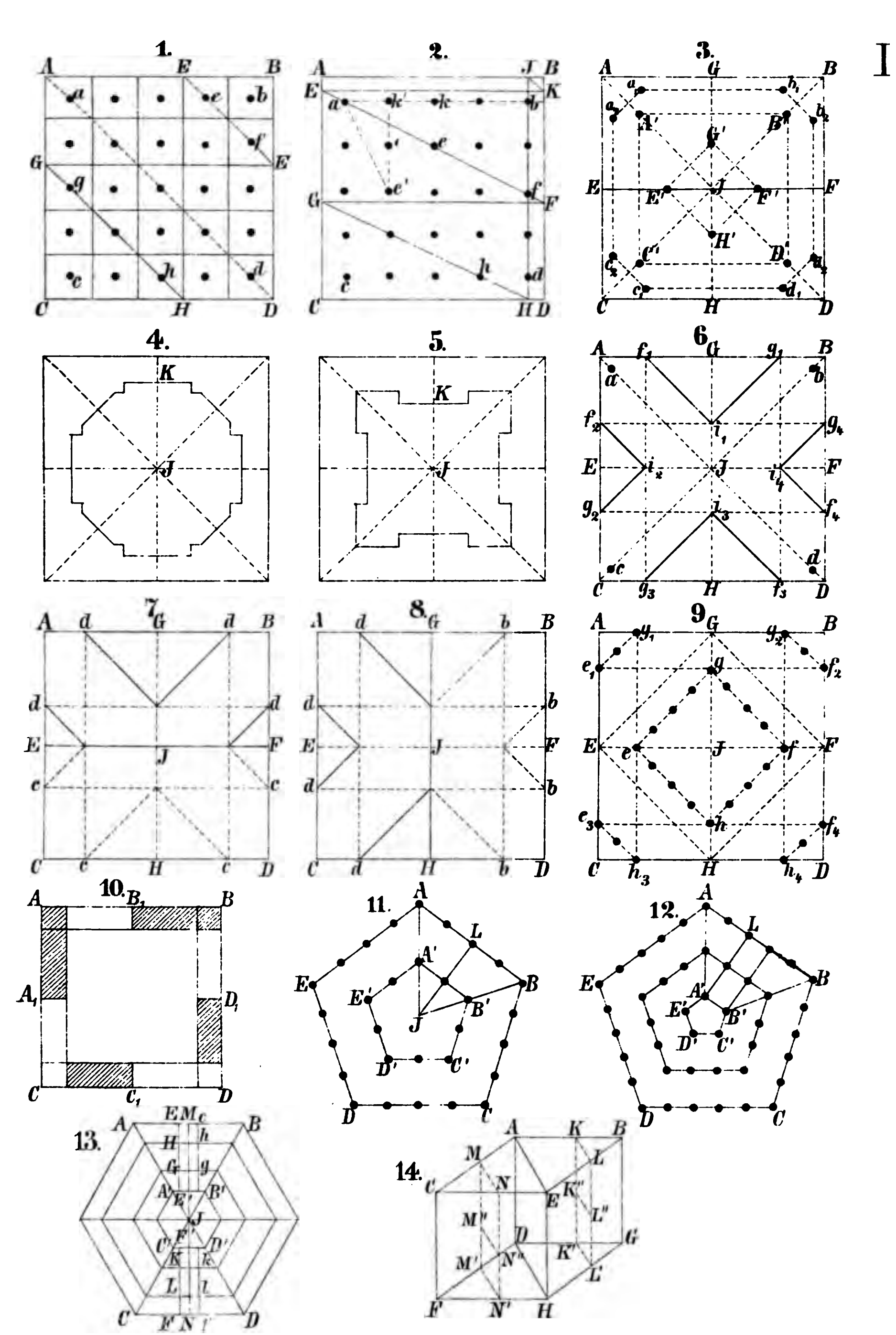
$$m + x(a \mp a' \mp a'') + x(b \mp b' \mp b'')\,n + x(c \mp c' \mp c'')\,n^2$$

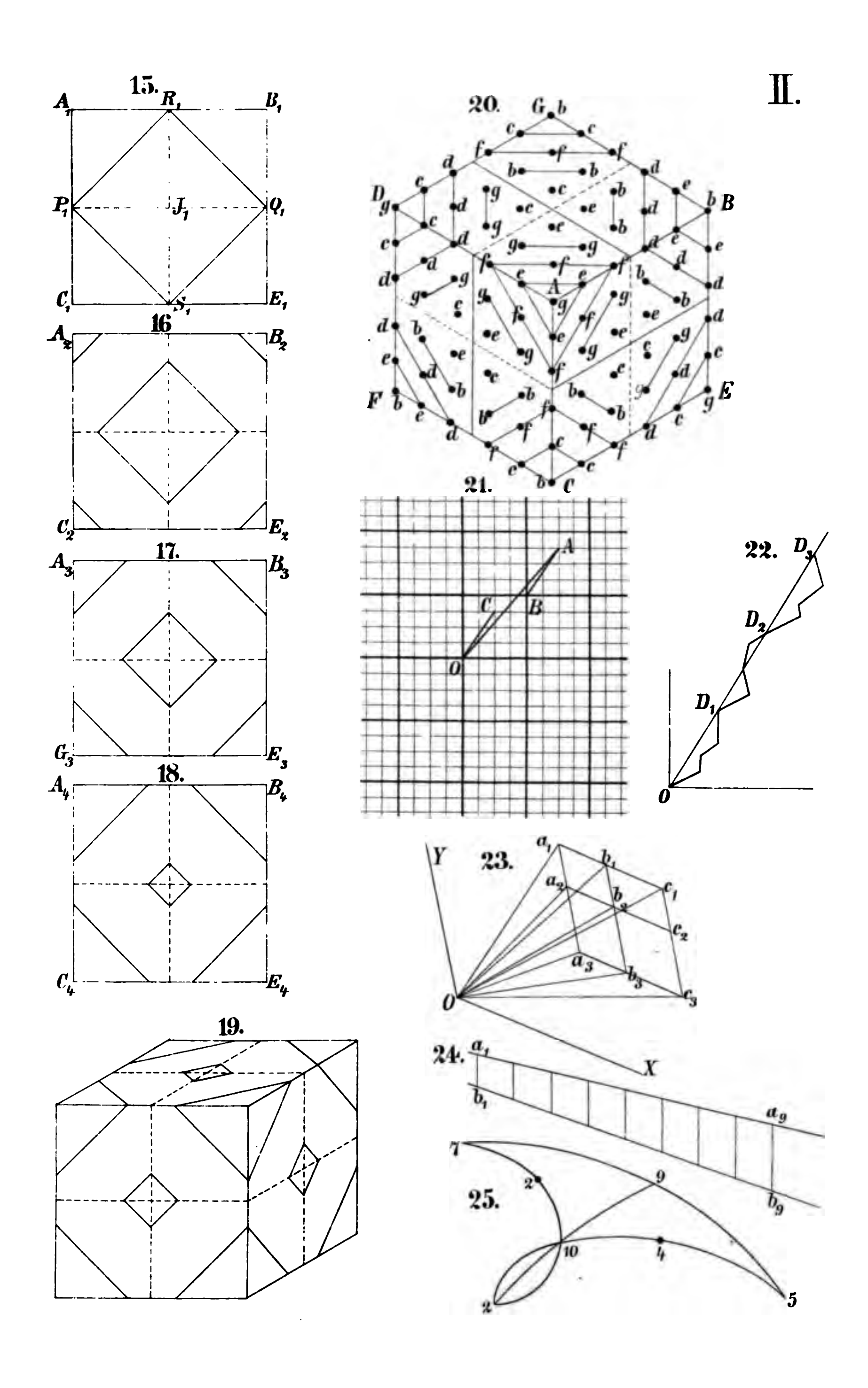
Hieraus geht hervor, dass, wenn diese Reihen eine konstante Summe enthalten sollen, die betreffenden 9, 18 und 12 Bedingungen in Nr. 53 erfüllt werden müssen.

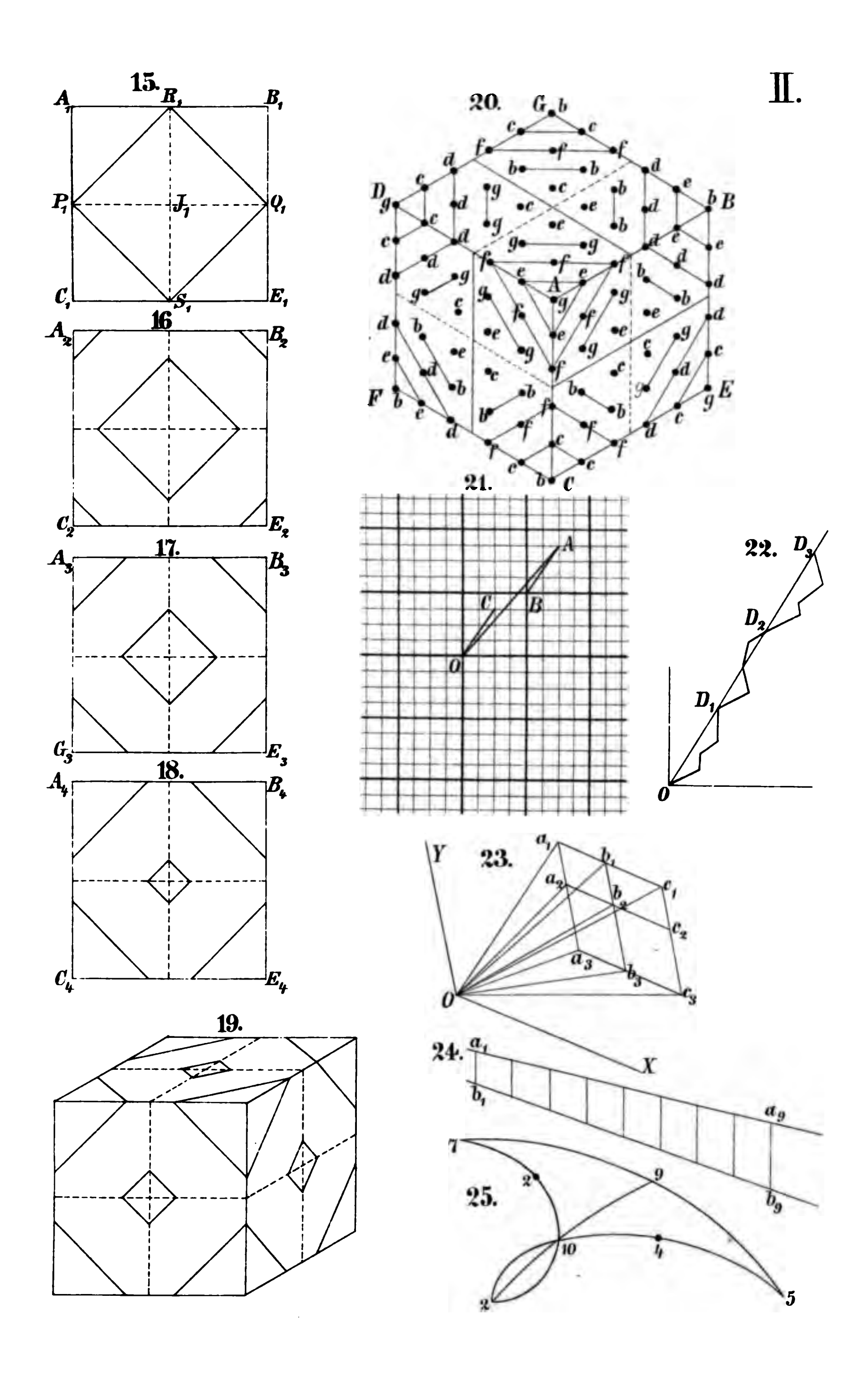
Nr. 54 enthält ein Beispiel.

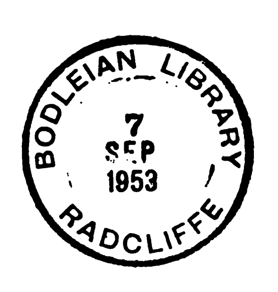
Die Sätze in Nr. 55 bis 62 ergeben sich aus der Ableitung und auf analoge Weise, wie die korrespondirenden Sätze für das magische Quadrat.

Berichtigung. In Fig. 12 der zugehörigen lithographirten Tafel ist der Buchstabe M auf den Punkt neben L zu setzen.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.


II.
15.
16
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.


15.
16
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.


BODLEIAN LIBRARY
7
SEP
1953
RADCLIFFE

Heiberg, Dr. **J. L.,** litterargeschichtliche Studien über Euklid. [IV u. 224 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 5.60.

Henrici, J., Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und **P. Treutlein,** Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Zweiter Teil. Perspektivische Abbildung in der Ebene. Berechnung der planimetrischen Gröfsen. Pensum der Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem Kärtchen. [VIII u. 242 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.80.

Hermes, Dr. **Johann,** ordentlicher Lehrer am Progymnasium des Königl. Waisenhauses zu Königsberg in Preussen, Gleichungen ersten und zweiten Grades schematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VII u. 87 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 1.60.

Hochheim, Dr. **Adolf,** Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. geh. in 2 Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. ℳ 1.50. B. Auflösungen. [102 S.] n. ℳ 1. 50. Zusammen ℳ 3.—

Holzmüller, Dr. **Gustav,** Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Mit 26 lithographirten Tafeln. [VIII u. 284 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 11.20.

Klein, Dr. **Felix,** o. ö. Professor der Geometrie a. d. Universität Leipzig, über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. [VIII u. 82 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.40.

Koehler, Dr. **Carl,** über eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen. [32 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.—.

Königsberger, Leo, Professor an der Universität zu Wien, allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. [XII u. 246 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 8.—.

Krazer, Dr. **Adolf,** Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. [VII u. 66 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 3.60.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weifsenburg i. Elsafs, elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 8.80.

Netto, Dr. **Eugen,** a. o. Professor an der Kaiser Wilhelms-Universität zu Strassburg i. E., Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. [VIII u. 290 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.80.

Pasch, Dr. **Moritz,** Professor an der Universität zu Gießen, Vorlesungen über neuere Geometrie. [IV u. 201 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 4.—.

——— Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VII u. 168 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.20.

Prym, Dr. **Friedrich,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. [VIII u. 112 S.] gr. 4. geh. n. ℳ 6.—.

Reidt, Prof. Dr. **F.,** Oberlehrer am Gymnasium und der höheren Bürgerschule in Hamm, die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VII u. 50 S.] gr. 8. kart. ℳ 1.20.

Salmon, George, analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilh. Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweite verbesserte Auflage. gr. 8. [XVI u. 508 S.] geh. n. ℳ 11.20.

Schlömilch, Dr. **O.,** Geh. Schulrat, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Dritte Auflage. [VII u. 384 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 7.60.

Weber, Dr. **Heinrich,** Professor der Physik an der Herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig, der Rotationsinduktor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm in absoluten Maassen. Mit zwei lithographirten Tafeln und in den Text gedruckten Holzschnitten. [IV u. 76 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 2.40.

Wüllner, Dr. **Adolph,** Professor der Physik an der Kgl. techn. Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Erster Band. Allgemeine Physik und Akustik. Vierte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [VIII u. 849 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 10.—.

Die folgenden Bände des gegenwärtig den ersten Rang einnehmenden ausführlichen Lehrbuchs der Physik werden vorerst noch nicht in neuer Auflage erscheinen. Für die Abnehmer sämtlicher 4 Bände ist daher ein neues Gesamtregister gedruckt worden, welches sich über die 4. Auflage des I. Bandes und die 3. Auflage des II., III. und IV. Bandes erstreckt. Dasselbe wird den Käufern des vollständigen Werkes gratis geliefert.

Zeuthen, H. G., Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. [VI u. 97 S.] gr. 8. geh. ℳ 2.—.







